

**Question Bank**  
**CLASS 12<sup>TH</sup>**  
**MATHEMATICS**  
**Unit-3 (Part-1) Continuity and Differentiability**  
**Assertion-Reason Questions**

**Instructions:**

Select the correct option for each Assertion-Reason question.

(A) Both assertion and reason are correct, and the reason is the correct explanation of assertion.

(B) Both assertion and reason are correct, but the reason does not explain the assertion.

(C) Assertion is correct, but the reason is incorrect.

(D) Assertion is incorrect, but the reason is correct.

निर्देश :-

1. प्रत्येक प्रश्न में एक कथन(A) और एक कारण (R) दिया गया है।
2. आपको दोनों कथनों का सावधानीपूर्वक विश्लेषण करके सही उत्तर का चयन करना है:  
A) A और R दोनों सही हैं, और R, A की सही व्याख्या करता है।  
B) A और R दोनों सही हैं, लेकिन R, A की सही व्याख्या नहीं करता।  
C) A सही है, लेकिन R गलत है।  
D) A गलत है, लेकिन R सही है।

Q1. Assertion (कथन): यदि किसी फलन  $f(x)$  का एक बिंदु पर अवकलनीयता सुनिश्चित होती है, तो वह बिंदु पर सतत भी होता है।

Reason (कारण): यदि कोई फलन  $x=a$  पर अवकलनीय है, तो यह आवश्यक रूप से वहाँ सतत होता है।

Assertion (English): If a function  $f(x)$  is differentiable at a point, then it must be continuous at that point.

Reason (English): If a function is differentiable at  $x=a$ , then it is necessarily continuous there.

Q2. Assertion (कथन): यदि  $f(x)$  एक अवकलनीय फलन है, तो  $f'(x)$  का अस्तित्व सदैव होता है।

Reason (कारण): अवकलनीयता से सततता सुनिश्चित होती है, लेकिन सततता से अवकलनीयता आवश्यक नहीं होती।

Assertion (English): If  $f(x)$  is a differentiable function, then  $f'(x)$  always exists.

Reason (English): Differentiability ensures continuity, but continuity does not necessarily ensure differentiability.

Q3. Assertion (कथन): यदि  $y = \sin^{-1}(x)$  हो, तो इसका अवकलन  $dy/dx = 1/\sqrt{1-x^2}$  होता है।

Reason (कारण): प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलन उनके संबंधित त्रिकोणमितीय फलनों से निकाला जाता है।

Assertion (English): If  $y = \sin^{-1}(x)$ , then its derivative is  $dy/dx = 1/\sqrt{1-x^2}$ .

Reason (English): The derivative of inverse trigonometric functions is obtained from their corresponding trigonometric functions.

Q4. Assertion (कथन): श्रृंखला नियम का उपयोग किसी संयुक्त फलन के अवकलन में किया जाता है।

Reason (कारण): यदि  $g(x)$  एक अवकलनीय फलन है और  $f(x)$  भी अवकलनीय है, तो  $(f \circ g)(x)$  भी अवकलनीय होगा।

Assertion (English): The chain rule is used to differentiate a composite function.

Reason (English): If  $g(x)$  is differentiable and  $f(x)$  is also differentiable, then  $(f \circ g)(x)$  is also differentiable.

Q5. Assertion (कथन): यदि  $y = e^x$  हो, तो इसका अवकलन  $dy/dx = e^x$  होता है।

Reason (कारण): चर घातांकी फलन  $e^x$  का अवकलन स्वयं के बराबर होता है।

Assertion (English): If  $y = e^x$ , then its derivative is  $dy/dx = e^x$

Reason (English): The derivative of the exponential function  $e^x$  is equal to itself.

Q6. Assertion (कथन): यदि  $y = \log(x)$  हो, तो इसका अवकलन  $dy/dx = 1/x$  होता है।

Reason (कारण): लघुगुणकीय फलनों का अवकलन उनके व्युत्क्रम गुणधर्म से प्राप्त होता है।

Assertion (English): If  $y = \log(x)$ , then its derivative is  $dy/dx = 1/x$ .

Reason (English): The derivative of logarithmic functions is obtained from their inverse properties.

Q7. Assertion (कथन): यदि कोई फलन अवकलनीय है, तो उसका द्वितीय कोटि अवकलन हमेशा अस्तित्व में होगा।

Reason (कारण): द्वितीय कोटि अवकलन केवल उन्हीं बिंदुओं पर परिभाषित होता है जहाँ प्रथम कोटि अवकलन सतत होता है।

Assertion (English): If a function is differentiable, then its second-order derivative always exists.

Reason (English): The second-order derivative is only defined at points where the first-order derivative is continuous.

Q8. Assertion (कथन): यदि  $y = \tan^{-1}(x)$  हो, तो इसका अवकलन  $dy/dx = 1/(1 + x^2)$  होता है।

Reason (कारण): प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलन उनके संबंधित त्रिकोणमितीय फलनों से प्राप्त होते हैं।

Assertion (English): If  $y = \tan^{-1}(x)$ , then its derivative is  $dy/dx = 1/(1 + x^2)$ .

Reason (English): The derivative of inverse trigonometric functions is derived from their corresponding trigonometric functions.

Q9. Assertion (कथन): यदि  $y = \cos^{-1}(x)$  हो, तो इसका अवकलन  $dy/dx = -1/\sqrt{1 - x^2}$  होता है।

Reason (कारण):  $\cos^{-1}(x)$  का अवकलन  $\sin^{-1}(x)$  के अवकलन का ऋणात्मक होता है।

Assertion (English): If  $y = \cos^{-1}(x)$ , then its derivative is  $dy/dx = -1/\sqrt{1 - x^2}$ .

Reason (English): The derivative of  $\cos^{-1}(x)$  is the negative of the derivative of  $\sin^{-1}(x)$ .

### MCQs

1. If  $f(x) = x^2 + 3x + 5$ , then  $f'(x)$  is:

यदि  $f(x) = x^2 + 3x + 5$  हो, तो  $f'(x)$  क्या होगा?

(A)  $2x + 3$

(B)  $x + 3$

(C)  $x^2 + 3$

(D)  $2x + 5$

2. If  $f(x) = e^{(3x)}$ , then  $f'(x)$  is:

यदि  $f(x) = e^{3x}$  हो, तो  $f'(x)$  क्या होगा?

(A)  $3e^{3x}$

(B)  $e^{3x}$

(C)  $3e^x$

(D)  $3x e^{3x}$

3. The derivative of  $\sin^{-1}(x)$  is:

$\sin^{-1}(x)$  का अवकलज क्या है?

(A)  $1/\sqrt{1 - x^2}$

(B)  $1/(1 + x^2)$

(C)  $-1/\sqrt{1 - x^2}$

(D)  $x$

4. If  $y = \log(x^2 + 1)$ , then  $dy/dx$  is:

यदि  $y = \log(x^2 + 1)$  हो, तो  $dy/dx$  क्या होगा?

(A)  $2x/(x^2 + 1)$

(B)  $x/(x^2 + 1)$

(C)  $2/(x^2 + 1)$

(D)  $1/(x^2 + 1)$

5. The derivative of  $\tan^{-1}(x)$  is:

$\tan^{-1}(x)$  का अवकलज क्या है?

(A)  $1/(1 + x^2)$

(B)  $1/\sqrt{1 - x^2}$

(C)  $-1/(1 + x^2)$

(D)  $x$

6. If  $y = \sin(x)\cos(x)$ , then  $dy/dx$  is:

यदि  $y = \sin(x)\cos(x)$  हो, तो  $dy/dx$  क्या होगा?

(A)  $\cos^2(x) - \sin^2(x)$

(B)  $2\sin(x)\cos(x)$

(C)  $\sin^2(x) - \cos^2(x)$

(D) 0

7. The second derivative of  $e^x$  is:

$e^x$  का द्वितीय अवकलज क्या है?

(A)  $e^x$

(B)  $2e^x$

(C)  $e^{2x}$

(D) 0

8. If  $y = \log(x)$ , then  $d^2y/dx^2$  is:

यदि  $y = \log(x)$  हो, तो  $d^2y/dx^2$  क्या होगा?

(A)  $-1/x^2$

(B)  $1/x^2$

(C)  $-1/x$

(D)  $1/x$

9. If  $y = x^x$ , then  $dy/dx$  is:

यदि  $y = x^x$  हो, तो  $dy/dx$  क्या होगा?

- (A)  $x^{x(1 + \log x)}$
- (B)  $x^{x \log x}$
- (C)  $x^{(x-1)}$
- (D)  $x^x$

10. If  $y = \sin(x^2)$ , then  $dy/dx$  is:

यदि  $y = \sin(x^2)$  हो, तो  $dy/dx$  क्या होगा?

- (A)  $2x \cos(x^2)$
- (B)  $\cos(x^2)$
- (C)  $-2x \sin(x^2)$
- (D)  $x \cos(x^2)$

11. If  $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x$  then  $f'(\frac{\pi}{4})$  is:

यदि  $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x$  तो  $f'(\frac{\pi}{4})$  है:

- (A)  $\sqrt{2}$
- (B)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- (C) 1
- (D) -1

12. If  $x = e^{y + e^{y + e^{y + \dots \infty}}}$  then  $\frac{dy}{dx}$  is-

यदि  $x = e^{y + e^{y + e^{y + \dots \infty}}}$  तो  $\frac{dy}{dx}$  है-

- (A)  $\frac{x}{x+1}$
- (B)  $\frac{1}{x}$
- (C)  $\frac{1-x}{x}$
- (D)  $\frac{x}{1-x}$

13. If  $y = x^{1/x}$ , then the value of  $\frac{dy}{dx}$  at  $x=e$  is equal to:

यदि  $y = x^{1/x}$ , तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान  $x=e$  पर होगा:

- (A) 1
- (B) 0
- (C) -1
- (D)  $e^{(\frac{1}{e})-2}$

14. If  $f(x) = x|x|, \forall x \in R$ , then:

यदि  $f(x) = x|x|, \forall x \in R$ , तो :

- (A)  $f$  is differentiable at  $x=0$   
 $f, x=0$  पर अवकलनीय है।
- (B)  $f$  is not derivable at  $x=0$   
 $f, x=0$  पर अवकलनीय नहीं है।
- (C)  $f$  is not continuous at  $x=0$   
 $f, x=0$  पर सतत नहीं है।

(D) None of the above

उपरोक्त में से कोई नहीं ।

15. If  $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , then  $\frac{dy}{dx} =$

यदि  $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , तो  $\frac{dy}{dx} =$

(A) 0

(B)  $\frac{\pi}{2}$

(C) 1

(D) 4

## 2 Marks questions

1. Prove that the function  $f(x) = x^2$  is continuous at  $x = 2$ .

सिद्ध करें कि फलन  $f(x) = x^2$ ,  $x = 2$  पर सतत है।

2. Verify whether  $f(x) = |x - 3|$  is differentiable at  $x = 3$ .

सत्यापित करें कि  $f(x) = |x - 3|$ ,  $x = 3$  पर अवकलनीय है या नहीं।

3. Find the derivative of  $\sin^{-1}(x)$  with respect to  $x$ .

$x$  के सापेक्ष  $\sin^{-1}(x)$  का अवकलज ज्ञात करें।

4. Differentiate  $\tan^{-1}(\sqrt{1 - x^2})$  with respect to  $x$ .

$\tan^{-1}(\sqrt{1 - x^2})$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलज निकालें।

5. Using the chain rule, differentiate  $y = \sin(\cos x)$ .

श्रृंखला नियम का उपयोग करके  $y = \sin(\cos x)$  का अवकलज निकालें।

6. Find the derivative of  $\log(x^2 + 1)$  using logarithmic differentiation.

लघुगणकीय अवकलन का उपयोग करके  $\log(x^2 + 1)$  का अवकलज निकालें।

7. Differentiate  $y = e^{(\tan x)}$  using the chain rule.

श्रृंखला नियम का उपयोग करके  $y = e^{\tan x}$  का अवकलज निकालें।

8. Find the derivative of  $y = \log(\sin x)$ .

$y = \log(\sin x)$  का अवकलज निकालें।

9. Find  $dy/dx$  if  $x^2 + y^2 = 25$  using implicit differentiation.

अस्पष्ट अवकलन का उपयोग करके, यदि  $x^2 + y^2 = 25$  हो तो  $dy/dx$  ज्ञात करें।

10. Differentiate  $y = x^x$  using logarithmic differentiation.

लघुगणकीय अवकलन का उपयोग करके  $y = x^x$  का अवकलज निकालें।

11. If  $y = e^{(x \log x)}$ , find  $dy/dx$ .

यदि  $y = e^{(x \log x)}$  हो, तो  $dy/dx$  ज्ञात करें।

12. Find the second order derivative of  $y = e^x \cos x$ .

$y = e^x \cos x$  का द्वितीय कोटि अवकलज ज्ञात करें।

13. Differentiate the parametric equations  $x = t^2 + 2t$ ,  $y = t^3 - t$ .

प्राचलिक समीकरणों  $x = t^2 + 2t$ ,  $y = t^3 - t$  का अवकलज निकालें।

14. Find  $d^2y/dx^2$  for  $y = \sin^2 x$ .

$y = \sin^2 x$  के लिए  $d^2y/dx^2$  ज्ञात करें।

15. If  $y = \sin(\log x)$ , find  $dy/dx$ .

**यदि  $y = \sin(\log x)$  हो, तो  $dy/dx$  ज्ञात करें।**

16. Differentiate  $y = \log(\log x)$ .

**$y = \log(\log x)$  का अवकलज निकालें।**

17. Find the derivative of  $y = e^{x^2}$

**$y = e^{x^2}$  का अवकलज निकालें।**

18. Find  $dy/dx$  if  $x = e^t$  and  $y = \log t$ .

**यदि  $x = e^t$  और  $y = \log t$  हो, तो  $dy/dx$  ज्ञात करें।**

19. If  $y = \cos^{-1}(x)$ , find  $dy/dx$ .

**यदि  $y = \cos^{-1}(x)$  हो, तो  $dy/dx$  ज्ञात करें।**

20. Find the second derivative of  $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

**$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$  का द्वितीय कोटि अवकलज ज्ञात करें।**

### Long Answer Questions (4 Marks)

1. एक सतत फलन का वास्तविक जीवन में क्या महत्व है? एक उदाहरण देकर स्पष्ट करें।

What is the real-life significance of a continuous function? Explain with an example.

2. साबुन के बुलबुले के बढ़ते आकार को सांतत्य और अवकलनीयता की अवधारणा से कैसे समझाया जा सकता है?

How can the expanding size of a soap bubble be explained using the concept of continuity and differentiability?

3. दिए गए फलन  $f(x) = |x-3|$  पर  $x = 3$  पर अवकलनीयता सिद्ध करें।

Prove the differentiability of the function  $f(x) = |x-3|$  at  $x = 3$ .

4. श्रृंखला नियम का उपयोग करते हुए  $y = \sin(\cos x)$  का अवकलज ज्ञात करें।

Find the derivative of  $y = \sin(\cos x)$  using the chain rule.

5. यदि  $y = \tan^{-1}(2x/1-x^2)$ , तो इसका अवकलज निकालें।

If  $y = \tan^{-1}(2x/1-x^2)$ , find its derivative.

6. व्यावहारिक संदर्भ में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलन का क्या उपयोग है?

What is the practical application of differentiation of inverse trigonometric functions?

7. यदि  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , तो  $dx/dy$  ज्ञात करें।

If  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , find  $dx/dy$ .

8. एक इंजीनियरिंग समस्या में, जब  $x = e^t$  और  $y = \log(t)$ , तो  $dy/dx$  निकालें।

In an engineering problem, if  $x = e^t$  and  $y = \log(t)$ , find  $dy/dx$ .

9. एक जीवविज्ञान अनुसंधान में, यदि किसी कोशिका की वृद्धि दर  $f(x) = e^x \log(x)$  दी गई हो, तो इसका अवकलज निकालें।

In a biological study, if the growth rate of a cell is given by  $f(x) = e^x \log(x)$ , find its derivative.

10.  $\log(xy) = x^2 - y^2$  के लिए,  $y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलज ज्ञात करें।

For  $\log(xy) = x^2 - y^2$ , find  $dy/dx$ .

11. यदि किसी वस्तु का आयतन  $V = a^3$  समय  $t$  का फलन हो, तो  $dV/dt$  ज्ञात करें।

If the volume of an object  $V = a^3$  is a function of time  $t$ , find  $dV/dt$ .

12. यदि  $y = \log(x^2 + 1)$ , तो इसका द्वितीय अवकलन निकालें।

If  $y = \log(x^2 + 1)$ , find its second derivative.

13. एक ड्रोन ऊँचाई  $h(t) = t^2 + 5t + 2$  के अनुसार बढ़ रहा है। 3 सेकंड के बाद इसका त्वरण ज्ञात करें।

A drone is ascending according to  $h(t) = t^2 + 5t + 2$ . Find its acceleration after 3 seconds.

14. दिए गए फलन  $y = x^x$  के लिए, लघुगुणकीय अवकलन का प्रयोग कर  $dy/dx$  ज्ञात करें।

For the given function  $y = x^x$ , find  $dy/dx$  using logarithmic differentiation.

15. एक वाहन की गति  $v(t) = 3t^2 + 2t - 5$  दी गई है। 4 सेकंड के बाद वाहन का त्वरण ज्ञात करें।

A vehicle's velocity is given by  $v(t) = 3t^2 + 2t - 5$ . Find the acceleration after 4 seconds.

16. यदि  $y = \sin(\log x)$ , तो  $d^2y/dx^2$  ज्ञात करें।

If  $y = \sin(\log x)$ , find  $d^2y/dx^2$ .

17. यदि किसी जीव का विकास दर  $f(t) = e^t + \log(t)$  दिया गया हो, तो उसके विकास में परिवर्तन की दर ज्ञात करें।

If a species' growth rate is given as  $f(t) = e^t + \log(t)$ , find the rate of change of growth.

18. यदि  $y = x \sin(x)$ , तो इसका द्वितीय अवकलन निकालें और इसके भौतिक महत्व की विवेचना करें।

If  $y = x \sin(x)$ , find its second derivative and discuss its physical significance.

### **Very Long Answer Questions (5 Marks)**

1. A company wants to optimize the cost of manufacturing a cylindrical container of fixed volume using minimum material. Using differentiation, determine the dimensions of the container for the least surface area.

एक कंपनी एक निश्चित आयतन के बेलनाकार कंटेनर का न्यूनतम सामग्री में उत्पादन करना चाहती है। न्यूनतम सतह क्षेत्र के लिए कंटेनर की विमाएं ज्ञात कीजिए।

2. The population of a city is modeled by the function  $P(t) = 5000e^{(0.02t)}$ . Find the rate of population growth after 10 years and interpret its significance. (Apply, Evaluate)

एक शहर की जनसंख्या  $P(t) = 5000e^{(0.02t)}$  द्वारा दी गई है। 10 वर्षों के बाद जनसंख्या वृद्धि दर ज्ञात करें और इसके महत्व की व्याख्या करें।

3. Verify the continuity and differentiability of the function  $f(x) = |x-3|$  at  $x = 3$ . Also, explain why it fails or holds.

दी गई फलन  $f(x) = |x-3|$  के  $x = 3$  पर सांतत्य और अवकलनीयता की जाँच करें। यह क्यों सत्य या असत्य है, समझाइए।

4. A drone is moving along the curve  $y = \sin^{-1}x$ . Find the velocity of the drone when  $x = 1/2$ . एक ड्रोन वक्र  $y = \sin^{-1}(x)$  के अनुसार चल रहा है। जब  $x = 1/2$  हो, तो ड्रोन की चाल ज्ञात कीजिए।

5. The height ( $h$ ) of a growing tree follows the function  $h(t) = 10 \log(t + 1)$ . Find the rate at which the tree is growing after 4 years.

एक बढ़ते हुए पेड़ की ऊँचाई  $h(t) = 10 \log(t + 1)$  द्वारा दी गई है। 4 वर्षों के बाद पेड़ की वृद्धि दर ज्ञात करें।

6. If the temperature of a metal rod at time  $t$  is given by  $T(t) = 100e^{(-0.1t)}$ , find the rate at which the temperature is decreasing after 5 minutes.

यदि समय  $t$  पर एक धातु छड़ का तापमान  $T(t) = 100e^{(-0.1t)}$ , दिया गया हो, तो 5 मिनट के बाद तापमान के गिरने की दर ज्ञात करें।

7. Differentiate the function  $y = \log(\sin x + \cos x)$  and discuss its significance in sound wave analysis.

फलन  $y = \log(\sin x + \cos x)$  को अवकलित करें और ध्वनि तरंगों के विश्लेषण में इसके महत्व पर चर्चा करें।

8. Show that the function  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  is increasing for  $x > 1$  and decreasing for  $x < 1$ . Interpret the result in terms of business profit optimization

सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ,  $x > 1$  के लिए वर्धमान है और  $x < 1$  के लिए ह्रासमान है।

व्यापार लाभ अनुकूलन के संदर्भ में परिणाम की व्याख्या करें।

9. Find the second-order derivative of  $y = e^{(\sin x)}$  and explain its importance in motion dynamics.

फलन  $y = e^{(\sin x)}$  का द्वितीय कोटि अवकलज ज्ञात करें और गति गतिकी में इसके महत्व को समझाइए।

10. A satellite follows the trajectory  $x = t^2$ ,  $y = \log(1 + t)$ . Find its velocity components at  $t = 2$  using parametric differentiation.

एक उपग्रह की गति  $x = t^2$ ,  $y = \log(1 + t)$  द्वारा दी गई है।  $t = 2$  पर इसके वेग घटक प्राचलिक अवकलन से ज्ञात करें।

11. Find the derivative of  $y = \tan^{(-1)}(x^2)$  using implicit differentiation.

फलन  $y = \tan^{(-1)}(x^2)$  का अस्पष्ट फलनों के अवकलन द्वारा अवकलज ज्ञात करें।

12. Explain the role of logarithmic differentiation in solving complex exponential equations with an example.

जटिल घातांक समीकरणों को हल करने में लघुगणकीय अवकलन की भूमिका को उदाहरण सहित स्पष्ट करें।

13. If a bacteria culture follows the law  $N(t) = N_0 e^{(kt)}$ , where  $k$  is a growth constant, find the rate of growth at any time  $t$ .

यदि एक बैक्टीरिया कल्चर का नियम  $N(t) = N_0 e^{(kt)}$  हो, जहाँ  $k$  एक वृद्धि स्थिरांक है, तो किसी भी समय  $t$  पर वृद्धि दर ज्ञात करें।

14. Use differentiation to prove that  $\log(x)$  grows slower than  $x$  for large values of  $x$ .

अवकलन का उपयोग करके सिद्ध करें कि  $\log(x)$ ,  $x$  के बड़े मानों के लिए  $x$  से धीमी गति से बढ़ता है।

15. Find the derivative of  $y = \sin^{(-1)}(x) + \cos^{(-1)}(x)$  and interpret the result. (Apply, Analyze)

फलन  $y = \sin^{(-1)}(x) + \cos^{(-1)}(x)$  का अवकलज ज्ञात करें और परिणाम की व्याख्या करें।

16. If  $y = x^x$ , find  $dy/dx$  using logarithmic differentiation and discuss its importance in compound interest calculations.

यदि  $y = x^x$  हो, तो लघुगणकीय अवकलन का उपयोग कर  $dy/dx$  ज्ञात करें और चक्रवृद्धि ब्याज गणना में इसके महत्व पर चर्चा करें।

17. Discuss how the chain rule helps in finding the derivatives of composite functions with a real-life example.

श्रृंखला नियम, संयुक्त फलनों के अवकलन में कैसे सहायक होता है, एक वास्तविक जीवन उदाहरण सहित समझाइए।



18. Find the maximum and minimum values of  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ .

फलन  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$  के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात करें।

19. A company's revenue function is  $R(x) = 500x - x^2$ . Find the production level that maximizes revenue.

एक कंपनी का राजस्व फलन  $R(x) = 500x - x^2$  है। उस उत्पादन स्तर को ज्ञात करें जो राजस्व को अधिकतम करता है।

20. Find the derivative of  $y = \log(\sin x + \cos x)$  and discuss its application in acoustics.

$y = \log(\sin x + \cos x)$  का अवकलन ज्ञात करें और ध्वनि विज्ञान में इसके अनुप्रयोगों पर चर्चा करें।

### **Case Study Based Questions**

#### **Case Study 1:**

A scientist is studying the growth of a bacterial culture in a laboratory. The population  $P(t)$  of bacteria at time  $t$  (in hours) follows the exponential growth formula:

$P(t) = P_0 e^{(kt)}$ , where  $P_0$  is the initial population and  $k$  is the growth rate constant.

To analyze the rate of bacterial growth, differentiation is used to find the rate of change of  $P(t)$  with respect to time.

Based on this scenario, answer the following questions:

एक वैज्ञानिक प्रयोगशाला में एक जीवाणु कल्चर की वृद्धि का अध्ययन कर रहा है। समय  $t$  (घंटों में) पर जीवाणुओं की जनसंख्या  $P(t)$  निम्नलिखित चरघातांकीय वृद्धि सूत्र का पालन करती है:  $P(t) = P_0 e^{(kt)}$ , जहाँ  $P_0$  प्रारंभिक जनसंख्या है और  $k$  वृद्धि दर नियतांक है।

जीवाणु वृद्धि की दर का विश्लेषण करने के लिए, अवकलन का उपयोग करके  $P(t)$  की समय के सापेक्ष परिवर्तन की दर ज्ञात की जाती है।

इस परिदृश्य के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दें:

#### **Questions:**

1. Differentiate  $P(t) = P_0 e^{(kt)}$  with respect to  $t$  to find the rate of growth of bacteria. (1 Mark)

$P(t) = P_0 e^{(kt)}$  को समय के सापेक्ष अवकलित कर जीवाणुओं की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए

2. If the initial population is 500 and the growth rate  $k = 0.2$  per hour, find the population after 5 hours. (1 Mark)

यदि जीवाणुओं की प्रारम्भिक संख्या 500 है  $k=0.5$  प्रति घंटा है तो 5 घण्टे बाद जीवाणुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

3. Show that the second derivative of  $P(t)$  is proportional to the function itself. (1 Mark)  
दर्शाएँ की  $P(t)$  का द्वितीय अवकलज स्वयं फलन के समानुपाती है।

4. How does exponential growth help in understanding the spread of diseases like COVID-19? Explain mathematically. (2 Marks)

चरघातांकी वृद्धि किस तरह से COVID-19 जैसी बीमारियाँ किस प्रकार फैलती हैं इसे समझने में सहायता करती है। गणितीय दृष्टिकोण से समझाइए।

#### **Case Study 2:**

A drone is flying vertically above the ground, and an observer is tracking its movement from a fixed point on the ground. Let  $h$  be the height of the drone and  $x$  be the horizontal distance

between the observer and the drone's projection on the ground. The angle of elevation  $\theta$  is given by:

एक ड्रोन जमीन के ऊपर लंबवत उड़ रहा है, और एक पर्यवेक्षक एक निश्चित बिंदु से उसके गति का अवलोकन कर रहा है। मान लीजिए कि  $h$  ड्रोन की ऊंचाई है और  $x$  पर्यवेक्षक और ड्रोन के भूमि पर प्रक्षेप के बीच क्षैतिज दूरी है। उन्नयन कोण  $\theta$  निम्नलिखित रूप में दिया गया है:

$$\theta = \tan^{-1}(h/x)$$

To study how fast the angle of elevation is changing as the drone moves, we differentiate the function implicitly.

यह अध्ययन करने के लिए कि ड्रोन के गति करने पर उन्नयन कोण कितनी तेजी से बदल रहा है, हम फलन का अस्पष्ट रूप से अवकलन करते हैं।

Answer the following questions:

**Questions:**

1. Differentiate  $\theta = \tan^{-1}(h/x)$  implicitly to find  $d\theta/dt$  in terms of  $dh/dt$  and  $dx/dt$ . (1 Mark)

$\theta = \tan^{-1}(h/x)$  को परोक्ष रूप से अवकलित कीजिए ताकि  $d\theta/dt$  को  $dh/dt$  और  $dx/dt$  के रूप में प्राप्त किया जा सके।

2. If  $h = 100$  m and  $x = 50$  m, find the value of  $d\theta/dt$  when  $dh/dt = 5$  m/s and  $dx/dt = 2$  m/s. (1 Mark)

यदि  $h=100$  मीटर और  $x=50$  मीटर हो, तो  $d\theta/dt$  का मान ज्ञात कीजिए जब  $dh/dt = 5$  m/s तथा  $dx/dt = 2$  m/s हो।

3. Verify if the function  $\theta = \tan^{-1}(h/x)$  is continuous for all positive values of  $h$  and  $x$ . (1 Mark)

यह जाँचें कि  $\theta = \tan^{-1}(h/x)$  नामक फलन सभी धनात्मक  $h$  तथा  $x$  के लिए सतत है या नहीं।

4. How does the concept of inverse trigonometric differentiation apply in satellite tracking and defense systems? (2 Marks)

उपग्रह ट्रैकिंग एवं रक्षा प्रणालियों में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय अवकलन की संकल्पना कैसे लागू होती है?