

Question Bank
Class 12
Mathematics
Unit -4 PART-2

ASSERTION REASON QUESTIONS

Instructions:

Select the correct option for each Assertion-Reason question.

(A) Both assertion and reason are correct, and the reason is the correct explanation of assertion.

(B) Both assertion and reason are correct, but the reason does not explain the assertion.

(C) Assertion is correct, but the reason is incorrect.

(D) Assertion is incorrect, but the reason is correct.

निर्देश :-

1. प्रत्येक प्रश्न में एक कथन(A) और एक कारण (R) दिया गया है।

2. आपको दोनों कथनों का सावधानीपूर्वक विश्लेषण करके सही उत्तर का चयन करना है:

A) A और R दोनों सही हैं, और R, A की सही व्याख्या करता है।

B) A और R दोनों सही हैं, लेकिन R, A की सही व्याख्या नहीं करता।

C) A सही है, लेकिन R गलत है।

D) A गलत है, लेकिन R सही है।

1. Assertion-Two lines in 3D space intersect if their parametric equations satisfy a common solution.

दो रेखाएँ त्रिविमीय अंतरिक्ष में प्रतिच्छेद करती हैं यदि उनके प्राचलिक समीकरण एक सामान्य हल को संतुष्ट करते हैं।

Reason (R) :If $r_1 = a + \lambda b$ and $r_2 = c + \mu d$, then they intersect when $r_1 = r_2$.

यदि $r_1 = a + \lambda b$ और $r_2 = c + \mu d$ हैं, तो वे तब प्रतिच्छेद करेंगी जब $r_1 = r_2$

Q2. Assertion (A) If three points in 3D space are collinear, then the determinant of their coordinates is zero.

यदि तीन बिंदु त्रिविमीय अंतरिक्ष में संरेखीय (Collinear) हैं, तो उनके निर्देशांक का सारणिक

(Determinant) शून्य होगा।

Reason (R)

Three points A, B, C are collinear if:

तीन बिंदु A, B, C संरेखीय होते हैं यदि:
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Q3. Assertion (A) :

If the direction ratios of two lines are proportional, then they are parallel in 3D space.

यदि दो रेखाओं के दिक् अनुपात समानुपाती (Proportional) हैं, तो वे त्रिविमीय अंतरिक्ष में समांतर (Parallel) होती हैं।

Reason (R)

If the direction ratios of two lines are (a_1, b_1, c_1) and (a_2, b_2, c_2) , then they are parallel if:

यदि दो रेखाओं के दिक् अनुपात (a_1, b_1, c_1) और (a_2, b_2, c_2) हैं, तो वे तब समांतर होंगी जब:

$$a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$$

Q4. Assertion (A) :

Two lines in 3D space are perpendicular if the dot product of their direction vectors is zero.

त्रिविमीय अंतरिक्ष में दो रेखाएँ लंबवत (Perpendicular) होती हैं यदि उनके दिशा सदिशों का अदिश गुणनफल (Dot Product) शून्य हो।

Reason (R)

If two lines have direction ratios (a_1, b_1, c_1) and (a_2, b_2, c_2) , they are perpendicular if:

यदि दो रेखाओं के दिक् अनुपात (a_1, b_1, c_1) और (a_2, b_2, c_2) हैं, तो वे तब लंबवत होंगी जब:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Q5..Assertion (A): If the direction cosines of a line are known, the direction ratios of the same line are uniquely determined.

कथन (A): यदि किसी रेखा के दिक् कोज्या ज्ञात हैं, तो उसी रेखा के दिक् अनुपात अद्वितीय रूप से निर्धारित होते हैं।

Q6.Reason (R): Direction ratios can be obtained from direction cosines by multiplying with any unique scalar factor.

कारण (R): दिक् कोज्या को किसी अद्वितीय अदिश गुणनखंड से गुणा करके दिक् अनुपात प्राप्त किए जा सकते हैं।

Q7. Assertion (A): The vector equation of a line depends only on its initial point and direction ratios.

कथन (A): किसी रेखा का सदिश समीकरण केवल उसके प्रारंभिक बिंदु और दिक् अनुपात पर निर्भर करता है।

Reason (R): The vector equation of a line is given as follows.

कारण (R): रेखा का सदिश समीकरण निम्नलिखित रूप में दिया जाता है।

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

Q8. Assertion (A): The Cartesian equation of a line is uniquely determined by two points.

कथन (A): किसी रेखा का कार्तीय समीकरण दो बिंदुओं द्वारा अद्वितीय रूप से निर्धारित होता है।

Reason (R): The equation of a line passing through two points is given below.

कारण (R): दो बिंदुओं से गुजरने वाली रेखा का समीकरण निम्नलिखित है।

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

Q9 Assertion (A): The shortest distance between two skew lines is always determined by their cross product of direction vectors.

कथन (A): दो विषमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी हमेशा उनके दिशा सदिशों के सदिश गुणन द्वारा निर्धारित की जाती है।

Reason (R): The shortest distance is given by the following formula.

कारण (R): न्यूनतम दूरी निम्नलिखित सूत्र द्वारा दी जाती है।

$$d = \frac{|(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Q10. Assertion (A): The angle between two lines is always determined by their direction cosines.

कथन (A): दो रेखाओं के बीच कोण हमेशा उनके दिक् कोज्या द्वारा निर्धारित किया जाता है।

Reason (R): The cosine of the angle is given by the following equation.

कारण (R): कोण का कोसाइन(कोज्या) निम्नलिखित समीकरण द्वारा दिया जाता है।

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}$$

One Mark Questions

Q1. If the direction ratios of a line are (a, b, c), express the direction cosines in terms of a, b, and c.

यदि किसी रेखा के दिक् अनुपात (a, b, c) हों, तो दिक् कोज्या को a, b और c के रूप में व्यक्त करें।

Q2. If a line has direction cosines l, m, n, what is the value of $l^2 + m^2 + n^2$?

यदि किसी रेखा के दिक् कोज्या l, m, n हों, तो $l^2 + m^2 + n^2$ का मान क्या होगा?

Q3. Write the vector equation of a line passing through a point $A(x_1, y_1, z_1)$ and parallel to a vector सदिश $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$.

ऐसी रेखा का सदिश समीकरण लिखें जो बिंदु $A(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरती हो और सदिश $\vec{B} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ के समानांतर हो।

Q4. Find the Cartesian equation of a line that passes through (2, -1, 3) and has direction ratios (1, 2, -1).

ऐसी रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (2, -1, 3) से गुजरती हो और जिसके दिक् अनुपात (1, 2, -1) हों।

Q5 Skew lines do not lie in the same plane and never intersect. Can two skew lines ever be parallel? Give example from daily life or 3D geometry.

विषमतलीय रेखाएँ एक ही तल में नहीं होतीं और कभी एक-दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करतीं। क्या दो विषमतलीय रेखाएँ कभी समांतर हो सकती हैं? दैनिक जीवन या त्रि-आयामी ज्यामिति से एक उदाहरण दीजिए।

Q6. Two lines in space do not intersect and are not parallel. Analyze the geometric condition under which the shortest distance between them is unique.

मुक्त आकाश में दो रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती और न ही समानांतर होती हैं। उन रेखाओं के मध्य अद्वितीय न्यूनतम दूरी की क्या शर्त होती है?

Q7. The shortest distance between two skew or parallel lines in 3D geometry can reveal important spatial relationships. Given the following parallel lines:

$$(x - 1)/2 = (y + 3)/-1 = (z - 4)/3 \text{ and } (x - 4)/2 = (y - 2)/-1 = (z - 1)/3.$$

Apply vector concepts and geometry to determine the shortest distance between these lines.

त्रिविमीय ज्यामिति में दो विषमतलीय या समांतर रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी से उनके स्थानिक संबंधों का पता चलता है। निम्नलिखित समांतर रेखाएँ दी गई हैं:

$$(x - 1)/2 = (y + 3)/-1 = (z - 4)/3 \text{ और } (x - 4)/2 = (y - 2)/-1 = (z - 1)/3$$

सदिशों और त्रिविमीय ज्यामिति की सहायता से इन रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।

Q8. Find the angle between two lines whose direction cosines satisfy the relation $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = \cos\theta$.

ऐसी दो रेखाओं के बीच कोण ज्ञात करें जिनके दिक् कोज्या निम्न संबंध को संतुष्ट करते हैं: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = \cos\theta$

Q9. If two lines are perpendicular to each other, what is the value of the dot product of their direction vectors?

यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे के लम्बवत हों, तो उनके दिक् सदिशों का अदिश गुणनफल क्या होगा?

Q10. Explain why two skew lines cannot have a common point.

यह समझाएँ कि दो विषमतलीय रेखाओं का कोई उभयनिष्ठ बिंदु क्यों नहीं हो सकता।

2 Marks Questions

1. For given two points A(1, 2, 3) and B(4, 6, 8), find the direction cosines of the line joining these points.

दिए गए दो बिंदु A(1, 2, 3) और B(4, 6, 8) के लिए, उन्हें जोड़ने वाली रेखा की दिक् कोज्या (direction cosines) ज्ञात कीजिए।

2. Find the vector equation of a line passing through the point (2, -1, 3) and parallel to the vector $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$.

ऐसी रेखा का सदिश समीकरण (vector equation) ज्ञात करें जो बिंदु (2, -1, 3) से गुजरती है और सदिश $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ के समानांतर है।

3. Given the vector equation of a line: $\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \lambda(4\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k})$

(i) Convert this into its Cartesian form.

(ii) Determine whether the point P(6, -2, 11) lies on the line or not.

एक रेखा का दिया गया सदिश समीकरण है: $\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \lambda(4\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k})$

(i) इसे कार्तीय रूप में बदलिए।

(ii) यह निर्धारित कीजिए कि क्या बिंदु P(6, -2, 11) रेखा पर स्थित है अथवा नहीं?

4. Prove that the lines

सिद्ध कीजिए कि दी गई रेखाएँ विषमतलीय रेखाएँ (skew lines) हैं।

$$(x - 1)/2 = (y + 3)/-1 = (z - 2)/4$$

and

$(x - 2)/3 = (y - 1)/2 = (z - 3)/5$
are skew lines.

5. Find the shortest distance between the skew lines:

नीचे दी गई विषमतलीय रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी (shortest distance) ज्ञात करें।

$$\vec{r} = (1 + 2\lambda)\hat{i} + (3 - \lambda)\hat{j} + (4 + 5\lambda)\hat{k}$$

and

$$\vec{R} = (2 + 3\mu)\hat{i} + (1 + 2\mu)\hat{j} + (3 + 5\mu)\hat{k}$$

6. Two skew lines are given. The first has direction vector $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ and the second has **position vector** $\vec{R} = (2 + 3\mu)\hat{i} + (1 + 2\mu)\hat{j} + (3 + 5\mu)\hat{k}$. Find the unit vector along shortest distance between them.

दो विषमतलीय रेखाएँ दी गयी हैं। जिनमें से प्रथम रेखा का दिशासदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और दूसरी रेखा का स्थिति सदिश $\vec{R} = (2 + 3\mu)\hat{i} + (1 + 2\mu)\hat{j} + (3 + 5\mu)\hat{k}$ हैं। उनके बीच की न्यूनतम दूरी के अनुदिश एकांक सदिश (unit vector) ज्ञात करें।

7. Find the angle between the lines whose direction cosines are given as $(2, -1, 3)$ and $(1, 4, -2)$.

उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करें जिनके दिक् कोज्या $(2, -1, 3)$ और $(1, 4, -2)$ दिए गए हैं।

8. If the lines

$$(x - 1)/3 = (y + 2)/4 = (z - 3)/5$$

and

$$(x + 2)/6 = (y - 1)/8 = (z + 4)/10$$

are perpendicular, determine the condition that their direction vectors must satisfy.

यदि रेखाएँ

$$(x - 1)/3 = (y + 2)/4 = (z - 3)/5$$

और

$$(x + 2)/6 = (y - 1)/8 = (z + 4)/10$$

लंबवत हैं, तो उनके दिक् सदिशों द्वारा संतुष्ट की जाने वाली शर्त निर्धारित करें।

9. Show that the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k})$$

and

$$\vec{R} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + \mu(-4\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

are parallel.

सिद्ध करें कि निम्नलिखित रेखाएँ समानांतर हैं:

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k})$$

और

$$\vec{R} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + \mu(-4\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

10. The line $\vec{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) + \lambda(4\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$ is rotated about the origin. How does the angle it makes with the coordinate axes change?

रेखा $\vec{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) + \lambda(4\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$ को मूल बिंदु के चारों ओर घुमाया जाता है। यह निर्देशांक अक्षों (coordinate axes) के साथ बने कोण को कैसे प्रभावित करेगा?

4 Marks Questions

Q1: A line has direction ratios (3, -4, 5). Normalize the direction ratios to obtain direction cosines and prove that they satisfy the identity $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Further, if a second line has direction ratios (1, 2, 2), determine the angle between the two lines.

यदि एक रेखा के दिक् अनुपात (3, -4, 5) हैं, तो उन्हें सामान्यीकृत कर दिक् कोसाइन ज्ञात करें और सिद्ध करें कि वे सर्वसमिका $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ को संतुष्ट करते हैं। साथ ही, यदि दूसरी रेखा के दिक् अनुपात (1, 2, 2) हों, तो दोनों रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करें।

Q2 : Given two points A(1, 2, 3) and B(4, 6, 8), find the direction cosines of line AB. Additionally, determine the projection of vector AB on the x-axis.

दो दिए गए बिंदु A(1, 2, 3) और B(4, 6, 8) को मिलाने वाली रेखा AB के दिक् कोसाइन ज्ञात करें। साथ ही, सदिश AB का x-अक्ष पर प्रक्षेप ज्ञात करें।

Q3 : Derive the vector equation of the line passing through (2, -1, 3) and parallel to vector

$\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$. Find whether this line intersects the plane $2x - y + z = 7$.

बिंदु (2, -1, 3) से गुजरने वाली और सदिश $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ के समानांतर रेखा का सदिश समीकरण प्राप्त करें। यह भी ज्ञात करें कि यह रेखा तल $2x - y + z = 7$ को प्रतिच्छेद करती है या नहीं।

Q4 : Derive the parametric equations of the line through point (1, 2, -3) and parallel to $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$. Then, find the point on this line where $z = 5$.

बिंदु (1, 2, -3) से गुजरने वाली और सदिश $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ के समानांतर रेखा के प्राचलिक समीकरण प्राप्त करें। फिर, उस बिंदु को ज्ञात करें जहाँ $z = 5$ हो।

Q5 : Prove that the lines $(x-1)/2 = (y+3)/4 = (z-5)/6$ and $(x-2)/1 = (y-4)/2 = (z-3)/-1$ are skew by showing they neither intersect nor are parallel. Further, compute the shortest distance between them. सिद्ध करें कि रेखाएँ $(x-1)/2 = (y+3)/4 = (z-5)/6$ और $(x-2)/1 = (y-4)/2 = (z-3)/-1$ विषमतलीय हैं अर्थात् न तो प्रतिच्छेद करती हैं और न ही समांतर हैं। साथ ही, उनके बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।

Q6 : Find the shortest distance between the skew lines Find the shortest distance between the skew lines:

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$\vec{R} = (4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$: Also, determine the point on each line where this shortest distance occurs.

निम्नलिखित विषमतलीय रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करें:

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$\vec{R} = (4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$: साथ ही दोनों रेखाओं पर वह बिंदु ज्ञात करें जिनके बीच यह न्यूनतम दूरी होती है।

Q7 : Determine whether the lines intersect. If so, find the point of intersection; if not, find the minimum distance between them. जाँच करें कि रेखाएँ और प्रतिच्छेद करती हैं या नहीं। यदि करती हैं, तो प्रतिच्छेदन बिंदु ज्ञात करें; अन्यथा उनके बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।

Q8 : A physicist is studying the interaction between two forces represented by vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$. Find the angle between the directions of these forces and confirm whether they form an acute angle

एक भौतिक विज्ञानी दो बलों की दिशा का अध्ययन कर रहा है, जिन्हें निम्नलिखित सदिशों द्वारा दर्शाया गया है: $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ हैं। उनके बीच का न्यूनतम कोण ज्ञात करें। यह भी सत्यापित करें कि वह कोण न्यून कोण है।

(दिया गया है $\cos^{-1}(-0.272) \approx 105.8^\circ$)

Q9 : Derive the condition under which the lines $\vec{r}_1 = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ and $\vec{r}_2 = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$ are perpendicular. Then, if vectors $\vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$, then verify if the lines are perpendicular.

रेखाओं $\vec{r}_1 = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r}_2 = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$ के परस्पर लम्बवत होने की शर्त प्राप्त कीजिए। यदि $\vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ तो यह सत्यापित कीजिए कि क्या ये रेखाएँ परस्पर लम्बवत हैं।

5 Marks Questions

1. A line has direction ratios proportional to (2, -1, 2).

(i) Find the exact direction cosines of the line.

(ii) A second line has direction ratios (1, 2, -2). Determine the acute angle between the two lines, and prove that they are perpendicular using vector approach.

(iii) Suppose this line lies in a plane. Find the Cartesian equation of that plane if it also passes through the point P(1, 2, -1).

एक रेखा के दिक् अनुपात (2, -1, 2) के समानुपाती हैं।

(i) इस रेखा के दिक् कोज्या ज्ञात करें।

(ii) एक दूसरी रेखा के दिक् अनुपात (1, 2, -2) हैं। दोनों रेखाओं के बीच का न्यून कोण ज्ञात करें और सदिश विधियों से सिद्ध करें कि वे लंबवत हैं।

(iii) यदि यह रेखा किसी तल में स्थित है, और वह तल बिंदु P(1, 2, -1) से भी गुजरता है, तो उस तल का कार्तीय समीकरण ज्ञात करें।

2. Given two points A(3, -2, 5) and B(7, 4, -1),

(i) Find the direction ratios and direction cosines of the line joining them.

(ii) A second line joins points C(1, 2, 3) and D(4, -1, 2). Verify whether $AB \perp CD$ or not.

बिंदु A(3, -2, 5) और B(7, 4, -1) को जोड़ने वाली रेखा के

(i) दिक् अनुपात और दिक् कोज्या ज्ञात करें।

(ii) दूसरी रेखा बिंदु C(1, 2, 3) और D(4, -1, 2) को जोड़ती है। परीक्षण करें कि $AB \perp CD$ है या नहीं।

3. Two lines have direction cosines $(1/3, 2/3, 2/3)$ and $(2/3, 1/3, -2/3)$.

(i) Find the angle between these lines.

(ii) Derive the general formula for the angle between two lines using direction cosines.

(iii) Using your result, verify orthogonality or non-orthogonality of lines and interpret geometrically.

दो रेखाओं के दिक् कोज्या $(1/3, 2/3, 2/3)$ और $(2/3, 1/3, -2/3)$ दिए गए हैं।

(i) रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करें।

(ii) दिक् कोज्या के उपयोग से रेखाओं के बीच कोण ज्ञात करने का सामान्य सूत्र सिद्ध करें।

(iii) प्राप्त परिणाम से रेखाओं के लंबवत अथवा अलंबवत होने की पुष्टि करें और ज्यामितीय व्याख्या करें।

4: An architect is designing a pair of steel beams in a complex structure. The beams are represented by the vector equations:

$$\text{Beam 1: } \vec{r}_1 = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$\text{Beam 2: } \vec{r}_2 = (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

(i) Determine the acute angle between the two beams to ensure they meet structural design criteria.

(ii) Verify whether these beams intersect at any point. If not, find the shortest distance between them to ensure a connecting bracket can be installed.

Assume all coordinates are in meters.

एक वास्तुकार एक जटिल संरचना में दो स्टील बीम की डिज़ाइन कर रहा है। बीम की स्थिति निम्नलिखित सदिश समीकरणों द्वारा दर्शाई गई है:

$$\text{बीम 1: } \vec{r}_1 = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$\text{बीम 2: } \vec{r}_2 = (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

(i) संरचनात्मक डिज़ाइन मानकों की पूर्ति के लिए दोनों बीम के बीच का न्यून कोण ज्ञात करें।

(ii) जाँच करें कि क्या ये बीम एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि नहीं, तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करें ताकि उनके बीच एक संबंधक कोष्ठक लगाया जा सके।

5: Two skew lines are given as:

$$(x - 2)/1 = (y + 1)/-2 = (z - 3)/4$$

$$(x + 3)/2 = (y - 2)/3 = (z - 1)/-1$$

(i) Find the shortest distance between the two skew lines using the cross product and projection method.

(ii) Interpret the physical significance of the shortest distance between these lines in a real-world context.

(iii) Formulate a general method to calculate the shortest distance between two skew lines using vector approach.

दो विषमतलीय रेखाएँ दी गई हैं:

$$(x - 2)/1 = (y + 1)/-2 = (z - 3)/4$$

$$(x + 3)/2 = (y - 2)/3 = (z - 1)/-1$$

(i) सदिश गुणन एवं प्रक्षेप विधि से न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।

(ii) इन रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी का वास्तविक जीवन संदर्भ में भौतिक महत्व स्पष्ट करें

(iii) विषमतलीय रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात करने की एक सामान्य विधि तैयार करें।

7. Find the vector equation of the line passing through points A(2, -3, 5) and B(4, 1, -2).

(i) Write parametric equations of the line.

(ii) Find the coordinates of the point that divides AB in the ratio 2:3 internally and externally.

(iii) Find the projection of vector **AB** on the coordinate axes.

बिंदु A(2, -3, 5) और B(4, 1, -2) से गुजरने वाली रेखा का:

(i) सदिश समीकरण और प्राचलिक समीकरण लिखें।

(ii) AB को 2:3 के आंतरिक और बाह्य अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु ज्ञात करें।

(iii) सदिश AB का निर्देशांक अक्षों पर प्रक्षेप ज्ञात करें

8: The lines:

$$(x - 1)/2 = (y + 1)/3 = (z - 2)/4$$

$$(x - 3)/-1 = (y - 4)/2 = (z + 1)/-3$$

are given in symmetrical form.

(i) Verify analytically that these lines intersect, and find their point of intersection.

(ii) Determine the unique plane in which both lines lie and find its vector equation.

(iii) Calculate the angle between the two lines, and explain its geometric interpretation in context of spatial orientation of the lines.

निम्न रेखाएँ सममित रूप में दी गई हैं:

$$(x - 1)/2 = (y + 1)/3 = (z - 2)/4$$

$$(x - 3)/-1 = (y - 4)/2 = (z + 1)/-3$$

(i) विश्लेषणात्मक रूप से सत्यापित करें कि ये रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं, और उनका प्रतिच्छेदन बिंदु ज्ञात करें।

(ii) उस एकमात्र तल का सदिश समीकरण ज्ञात करें जिसमें ये दोनों रेखाएँ स्थित हैं।

(iii) रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात करें और उसका ज्यामितीय अर्थ स्पष्ट करें — जैसे कि उनके आपसी झुकाव या स्थिति की व्याख्या करें।

9: Three points A(1, 2, 3), B(3, 6, 9), and C(5, 10, 15) are given.

(i) Prove they are collinear using vector method.

(ii) Find the equation of the line passing through them.

(iii) Determine if any point P(x, y, z) lies on the same line for which $x/1 = y/2 = z/3$ holds.

तीन बिंदु A(1, 2, 3), B(3, 6, 9), और C(5, 10, 15) दिए गए हैं।

(i) सिद्ध करें कि वे रेखीय हैं (सदिश विधि से)।

(ii) उस रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो इन बिंदुओं से गुजरती है।

(iii) जाँच करें कि क्या कोई बिंदु P(x, y, z), जिसके लिए $x/1 = y/2 = z/3$ हो, इस रेखा पर स्थित हो सकता है।

10: In an industrial setup, two conveyor belts are suspended in space and modeled by the following vector equations:

Conveyor A: $\vec{r}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

Conveyor B: $\vec{r}_2 = (4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

- (i) Show that these two conveyor paths are non-parallel and skew.
- (ii) Using determinant method, calculate the shortest distance between them.
- (iii) Explain why calculating this distance is important in practical applications like ensuring safe spacing and avoiding collisions in automation systems.

एक औद्योगिक संयंत्र में दो कन्वेयर बेल्ट को हवा में इस प्रकार स्थापित किया गया है कि उनका पथ निम्नलिखित सदिश समीकरणों द्वारा दर्शाया जाता है:

$$\text{कन्वेयर A: } \vec{r}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\text{कन्वेयर B: } \vec{r}_2 = (4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) + \mu(-2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

- (i) सिद्ध करें कि ये दोनों कन्वेयर रेखाएँ विषमतलीय हैं और आपस में समानांतर नहीं हैं।
- (ii) सारणिक विधि का उपयोग करके इनके बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।
- (iii) स्पष्ट करें कि इस दूरी की गणना व्यावहारिक रूप से क्यों महत्वपूर्ण है।

Case Study Questions

Case Study 1:

A drone is flying from point A(1,2,3) to point B(4,6,8). The control system of the drone calculates the direction cosines of the path to ensure correct navigation. The direction ratios of the line joining these points help in adjusting its path. The ground control station needs to determine the Cartesian and vector equations of this line to analyze its flight trajectory.

एक ड्रोन बिंदु A(1, 2, 3) से बिंदु B(4, 6, 8) की ओर उड़ान भर रहा है। ड्रोन की नियंत्रण प्रणाली सही दिशा) त करने के लिए मार्ग के दिक् कोज्यानिर्देशन सुनिश्चि-Direction Cosines) की गणना करती है। इन बिंदुओं को जोड़ने वाली रेखा के दिक् अनुपात)Direction Ratios) ड्रोन के मार्ग को समायोजित करने में सहायक होते हैं। ग्राउंड कंट्रोल स्टेशन को ड्रोन की उड़ान पथ)Flight Trajectory) का विश्लेषण करने हेतु इस रेखा का कार्तीय तथा सदिश समीकरण ज्ञात करना आवश्यक है।

Questions:

- 1. Find the direction ratios of the line joining points A and B. (1 Mark)
बिंदु A और B को जोड़ने वाली रेखा के दिक् अनुपात ज्ञात कीजिए।
- 2. Find the direction cosines of the line joining points A and B. (1 Mark)
बिंदु A और B को जोड़ने वाली रेखा के दिक् कोज्या ज्ञात कीजिए।
- 3. Write the vector equation of the line passing through A and B. (1 Mark)
बिंदु A और B से गुजरने वाली रेखा का सदिश समीकरण लिखिए।
- 4. Derive the Cartesian equation of the line passing through A and B. (2 Marks)
बिंदु A और B से गुजरने वाली रेखा का कार्तीय समीकरण व्युत्पन्न कीजिए।

Case Study 2:

An architect is designing a unique building where two non-parallel steel beams are placed in such a way that they do not intersect. The equations of these beams in 3D space are:

$$(x - 2)/3 = (y + 1)/-2 = (z - 4)/5$$

$$(x - 5)/1 = (y - 3)/2 = (z + 2)/-4$$

The architect needs to find out whether the beams are skew lines and determine the shortest distance between them

एक वास्तुकार एक अद्वितीय भवन डिज़ाइन कर रहा है, जिसमें दो असमानांतर स्टील की बीमों को इस प्रकार स्थापित किया गया है कि वे एक-दूसरे को प्रतिच्छेद (intersect) नहीं करती हैं। त्रि-आयामी (3D) अंतरिक्ष में इन बीमों की समीकरण निम्नलिखित हैं:

$$(x - 2)/3 = (y + 1)/-2 = (z - 4)/5$$

$$(x - 5)/1 = (y - 3)/2 = (z + 2)/-4$$

वास्तुकार को यह ज्ञात करना है कि क्या ये बीमों विषमतलीय रेखाएँ (skew lines) हैं तथा उनके बीच की न्यूनतम दूरी कितनी है।"

Questions:

- 1. Define skew lines in three-dimensional geometry. (1 Mark)
त्रि-आयामी ज्यामिति में विषमतलीय रेखाओं (skew lines) को परिभाषित कीजिए।
- 2. Find the direction ratios of both lines given in the case study. (1 Mark)
दी गई दोनों रेखाओं के दिक् अनुपात ज्ञात कीजिए।
- 3. Check if the given lines are parallel. Justify your answer. (1 Mark)
जांच करें कि क्या दी गई रेखाएँ समांतर हैं। अपने उत्तर को उचित ठहराइए।
- 4. Find the shortest distance between the given skew lines. (2 Marks)
दी गई विषमतलीय रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Case Study 3:

At an international airport, two airplanes are flying along different paths given by the equations:

$$\vec{r}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{r}_2 = (4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

Air traffic controllers need to determine the angle between these flight paths to ensure safe distances between the airplanes.

एक अंतरराष्ट्रीय हवाई अड्डे पर, दो विमान निम्नलिखित समीकरणों द्वारा दिए गए विभिन्न मार्गों पर उड़ान भर रहे हैं:

$$\vec{r}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}),$$

$$\vec{r}_2 = (4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + \mu(3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

वायु यातायात नियंत्रकों को विमानों के बीच सुरक्षित दूरी सुनिश्चित करने के लिए इन उड़ान मार्गों के बीच कोण निर्धारित करना होगा।

Questions:

1. Find the direction vectors of both flight paths. (1 Mark)
दोनों विमान पथों के दिक् सदिश ज्ञात करें।
2. Write the formula to find the angle between two lines in vector form. . (1 Mark)
सदिश रूप में दो रेखाओं के बीच कोण ज्ञात करने का सूत्र लिखें।
3. Calculate the dot product of the given direction vectors. (1 Mark)
दिए गए दिक् सदिशों का अदिश गुणनफल ज्ञात करें।
4. Determine the angle between the two flight paths using the dot product formula. (2 Marks)
अदिश गुणनफल सूत्र का उपयोग करके दो विमान पथों के बीच कोण ज्ञात करें।