

Class 12th Mathematics

Question Bank

Unit-1

Assertion-Reason Questions

Instructions:

Select the correct option for each Assertion-Reason question.

(A) Both assertion and reason are correct, and the reason is the correct explanation of assertion.

(B) Both assertion and reason are correct, but the reason does not explain the assertion.

(C) Assertion is correct, but the reason is incorrect.

(D) Assertion is incorrect, but the reason is correct.

निर्देश :-

1. प्रत्येक प्रश्न में एक कथन(A) और एक कारण (R) दिया गया है।
2. आपको दोनों कथनों का सावधानीपूर्वक विश्लेषण करके सही उत्तर का चयन करना है:

A) A और R दोनों सही हैं, और R, A की सही व्याख्या करता है।

B) A और R दोनों सही हैं, लेकिन R, A की सही व्याख्या नहीं करता।

C) A सही है, लेकिन R गलत है।

D) A गलत है, लेकिन R सही है।

Q. No.	Assertion-Reason Questions
1	<p>कथन (A) : यदि एक संबंध (relation) एक समुच्चय A पर परिभाषित हो और वह स्वतुल्य (reflexive), सममित (symmetric) और संक्रामक (transitive) हो, तो वह तुल्यता संबंध (equivalence relation) कहलाता है।</p> <p>Assertion (A): If a relation defined on a set A is reflexive, symmetric, and transitive, then it is called an equivalence relation.</p> <p>कारण (R): एक तुल्यता संबंध (equivalence relation) समुच्चय को असंयुक्त (disjoint) वर्गों में विभाजित करता है।</p> <p>Reason (R): An equivalence relation partitions the set into disjoint classes.</p>
2	<p>कथन (A) : वास्तविक संख्याओं के समुच्चय (R) में फलन $f(x)=x^3 \forall$</p>

	<p>$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, एकैकी फलन है।</p> <p>Assertion (A): function $f(x)=x^3 \forall f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, is a one-one function for the set of real numbers.</p> <p>कारण (R): $f(x)$, एकैकी है क्योंकि सहप्रान्त=परिसर</p> <p>Reason (R): $f(x)$ is one-one because Co domain = Range</p>
3	<p>कथन (A) : यदि $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6,7\}$ तथा $f = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}$ तो फलन $f: A \rightarrow B$ एक एकैकी फलन है।</p> <p>Assertion: If $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6,7\}$ and $f = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}$ then function $f: A \rightarrow B$ is one-one function.</p> <p>कारण: फलन $f: A \rightarrow B$ एक आच्छादक फलन है।</p> <p>Reason(R): Function $f: A \rightarrow B$ is an onto function.</p>
4	<p>कथन (A) : यदि $f(x) = \sin^{-1}(x)$ हो, तो इसका प्रान्त $[-1,1]$ और परिसर $[-\pi/2, \pi/2]$ होता है।</p> <p>Assertion (A): If $f(x) = \sin^{-1}(x)$, then its domain is $[-1,1]$ and range is $[-\pi/2, \pi/2]$.</p> <p>कारण (R): प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की परिसर को उनकी मुख्य शाखा से परिभाषित किया जाता है।</p> <p>Reason (R): The range of inverse trigonometric functions is defined based on their principal branch.</p>
5	<p>कथन (A) : यदि $f(x) = \tan^{-1}(x)$ हो, तो इसका प्रान्त $(-\infty, \infty)$ और परिसर $(-\pi/2, \pi/2)$ होता है।</p> <p>Assertion (A): If $f(x) = \tan^{-1}(x)$, then its domain is $(-\infty, \infty)$ and range is $(-\pi/2, \pi/2)$.</p> <p>कारण (R): प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन $\tan^{-1}(x)$ का मुख्य शाखा प्रतिबंधित होता है ताकि यह एकैकी और व्युत्क्रमणीय हो सके।</p> <p>Reason (R): The principal branch of the inverse trigonometric function $\tan^{-1}(x)$ is restricted to make it one-one and invertible.</p>
6	<p>कथन (A) : $\sin^{-1} \sin(\frac{2\pi}{3})$ का मान $(\frac{2\pi}{3})$ होता है।</p> <p>Assertion (A): The value of $\sin^{-1} \sin(\frac{2\pi}{3})$ is $(\frac{2\pi}{3})$.</p> <p>कारण (R): $\sin^{-1} \sin(\theta)$ का मान θ के बराबर होता है ।</p>

	Reason (R): The value of $\sin^{-1}\sin(\theta)$ is equal to θ .
7	<p>कथन (A) : यदि $f(x) = \cos^{-1}(x)$, तो इसका प्रांत $[-1,1]$ और परिसर $[0, \pi]$ होता है।</p> <p>Assertion (A): If $f(x) = \cos^{-1}(x)$, then its domain is $[-1,1]$ and range is $[0, \pi]$.</p> <p>कारण (R): $\cos^{-1}(x)$ का मुख्य मान शाखा $[0, \pi]$ पर परिभाषित होता है।</p> <p>Reason (R): The principal value branch of $\cos^{-1}(x)$ is defined over $[0, \pi]$.</p>
8	<p>कथन (A) : यदि एक फलन $f : A \rightarrow B$ सममित और संक्रामक है, तो यह आवश्यक नहीं कि यह स्वतुल्य भी हो।</p> <p>Assertion (A): If a function $f : A \rightarrow B$ is symmetric and transitive, it is not necessarily reflexive.</p> <p>कारण (R): स्वतुल्यता (reflexivity) एक स्वतंत्र गुणधर्म है और इसे अलग से सत्यापित किया जाना चाहिए।</p> <p>Reason (R): Reflexivity is an independent property and must be verified separately.</p>

One Mark Questions

Q. No.	Question
1	<p>What type of relation is both symmetric and transitive but not necessarily reflexive?</p> <p>जो संबंध सममित और संक्रामक दोनों होता है लेकिन आवश्यक रूप से स्वतुल्य नहीं होता है, उसे क्या कहते हैं?</p>
2	<p>Which relation satisfies reflexivity, symmetry, and transitivity simultaneously?</p> <p>कौन सा संबंध एक साथ स्वतुल्यता, सममिति और संक्रामकता को संतुष्ट करता है?</p>
3	<p>What is the name of a function that is both one-one and onto?</p> <p>ऐसे फलन को क्या कहते हैं जो एकैकी और आच्छादक दोनों हो?</p>

4	What is the principal value of $\sin^{-1}(-1)$? $\sin^{-1}(-1)$ का प्रमुख मान क्या है?
5	What is a function $f: X \rightarrow Y$ called, in which the range of f equals Y ? ऐसे फलन $f: X \rightarrow Y$, जिसमें f का परिसर $= Y$ क्या कहलाता है?
6	Which relation is always reflexive? कौन सा संबंध हमेशा स्वतुल्य होता है?
7	Which function represents the reflection of $y = \sin(x)$ about the line $y = x$? $y = \sin(x)$ का रेखा $y = x$ के बारे में स्वतुल्यता कौन सा फलन दर्शाता है?
8	What is the range of $\tan^{-1}(x)$? $\tan^{-1}(x)$ का परिसर क्या है?
9	Which function has the largest domain among all inverse trigonometric functions? किस प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का प्रांत सबसे बड़ा होता है?
10	If $f(x) = x^3 + 1$, is it one-one? यदि $f(x) = x^3 + 1$, तो क्या यह एकैकी है?
11	Which inverse trigonometric function has the range $[0, \pi]$? कौन सा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का परिसर $[0, \pi]$ होता है?
12	For which values of x is $\sin^{-1}(x)$ defined? किन x के मानों के लिए $\sin^{-1}(x)$ परिभाषित होता है?
13	What is the domain of $\sec^{-1}(x)$? $\sec^{-1}(x)$ का प्रांत क्या है?
14	What is the range of $\cos^{-1}(x)$? $\cos^{-1}(x)$ का परिसर क्या है?
15	How many equivalence relations on the set $A = \{a, b, c\}$ include the pair (a, b) as an element?

	समुच्चय $A = \{a, b, c\}$ में अवयव (a,b) वाले तुल्यता संबंधों की संख्या कितनी है?
16	Which trigonometric function is neither one-one nor onto in its natural domain? कौन सा त्रिकोणमितीय फलन अपने प्राकृतिक प्रांत में न तो एकैकी होता है और न ही आच्छादक ?
17	Which inverse trigonometric function has a domain of $[-1,1]$ and a range of $[-\pi/2, \pi/2]$? कौन सा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का प्रांत $[-1,1]$ और परिसर $[-\pi/2, \pi/2]$ है?
18	If $\tan^{-1} x = A$, then find the value of $\sec A$. यदि $\tan^{-1} x = A$ तो $\sec A$ का मान ज्ञात करो।
19	Which relation is defined on any set and contains all possible ordered pairs? कौन सा संबंध किसी भी समुच्चय पर परिभाषित होता है और सभी संभावित क्रमबद्ध युग्मों को शामिल करता है?
20	$2\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ का मान ज्ञात कीजिए । Find the value of $2\sin^{-1}(\frac{1}{2})$
21	यदि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $(a,a) \in R$ तो इस संबंध को क्या कहते हैं? If $(a, a) \in R$ for every $a \in A$, then what is this relation called?
22	If $f(x) = x^3 + 1$, is it one-one? यदि $f(x) = x^3 + 1$, तो क्या यह एकैकी है?
23	Which inverse trigonometric function has the range $[0, \pi]$? कौन सा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का परिसर $[0, \pi]$ होता है?
24	For which values of x is $\sin^{-1}(x)$ defined? x के किन मूल्यों के लिए $\sin^{-1}(x)$ परिभाषित होता है?

25	<p>In a function $f: x \rightarrow y, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ what is this function called.</p> <p>यदि फलन $f: x \rightarrow y$ में $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ तो यह फलन क्या कहलाता है?</p>
26	<p>Which trigonometric function is neither one-one nor onto in its natural domain?</p> <p>कौन सा त्रिकोणमितीय फलन अपने प्राकृतिक प्रांत में न तो एकैकी होता है और न ही आच्छादक ?</p>
27	<p>Which inverse trigonometric function has a domain of $[-1,1]$ and a range of $[-\pi/2, \pi/2]$?</p> <p>कौन सा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का प्रांत $[-1,1]$ और परिसर $[-\pi/2, \pi/2]$ है?</p>
28	<p>Which relation is defined on any set and contains all possible ordered pairs?</p> <p>कौन सा संबंध किसी भी समुच्चय पर परिभाषित होता है और सभी संभावित क्रमबद्ध युग्मों को शामिल करता है?</p>

2 Marks Questions

Q. No.	Question
1	<p>Prove that the intersection of two equivalence relations on a set is also an equivalence relation.</p> <p>सिद्ध कीजिए कि किसी समुच्चय पर दो तुल्यता संबंधों का प्रतिच्छेद भी एक तुल्यता संबंध होता है।</p>
2	<p>Find the number of equivalence relations on a set containing 3 elements.</p> <p>3 अवयवों वाले समुच्चय पर तुल्यता संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।</p>
3	<p>Give an example of a relation which is symmetric and transitive but not reflexive.</p> <p>ऐसे संबंध का एक उदाहरण दीजिए जो सममित और संक्रामक हो लेकिन स्वतुल्य न हो।</p>
4	<p>Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined as $f(x) = x^3$. Prove that f is one-one and onto.</p> <p>यदि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ऐसा दिया गया है कि $f(x) = x^3$, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी और आच्छादक है।</p>
5	<p>Determine whether the function $f(x) = x$ is one-one and onto from \mathbb{R} to \mathbb{R}.</p>

	निर्धारित कीजिए कि $f(x) = x $ फलन R से R पर एकैकी और आच्छादक है या नहीं।
6	Write all equivalence relations on the set $A = \{1, 2, 3\}$ समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ के सभी तुल्यता संबंधों को लिखिए।
7	Let $A = \{1, 2, 3\}$ and $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$. Check whether R is reflexive, symmetric, and transitive. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$ हो, तो जाँच कीजिए कि R स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है या नहीं।
8	Find the domain of the function $f(x) = \sin^{-1}(2x + 1)$. $f(x) = \sin^{-1}(2x + 1)$ फलन का प्रांत ज्ञात कीजिए।
9	$f(x) = \sin^{-1} \sqrt{x - 1}$ का प्रांत ज्ञात करो ? Find the domain of the function $f(x) = \sin^{-1} \sqrt{x - 1}$
10	Find the range of $\cos^{-1}(\sin x)$ for $x \in [0, \pi]$. यदि $x \in [0, \pi]$ हो, तो $\cos^{-1}(\sin x)$ का परिसर ज्ञात कीजिए।
11	मान ज्ञात करें $\cos[\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\pi}{6}]$ Evaluate $\cos[\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\pi}{6}]$
12	Find the principal value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \tan^{-1}(1/\sqrt{3})$. $\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \tan^{-1}(1/\sqrt{3})$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।
13	Find the value of $\cos^{-1}(\cos(5\pi/3))$. $\cos^{-1}(\cos(5\pi/3))$ का मान ज्ञात कीजिए।
14	Show that $f(x) = e^x$ is one-one but not onto from R to R . सिद्ध कीजिए कि $f(x) = e^x$, R से R पर एकैकी तो है लेकिन आच्छादक नहीं है।
15	Prove that $f(x) = x/(1+ x)$ is one-one and onto from R to $(-1, 1)$. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x/(1+ x)$, R से $(-1, 1)$ पर एकैकी और आच्छादक है।
16	Find the domain of the real valued function $f(x) = \sqrt{(25 - x^2)}$ वास्तविक मानीय फलन $f(x) = \sqrt{(25 - x^2)}$ का प्रांत ज्ञात करें।
17	If $\sin^{-1}(x) = y$, express $\cos^{-1}(x)$ in terms of y . यदि $\sin^{-1}(x) = y$ हो, तो $\cos^{-1}(x)$ को y के रूप में व्यक्त कीजिए।
18	Find the value of $\sin^{-1}(\sin(5\pi/6))$

	$\sin^{-1}(\sin(5\pi/6))$ का माँ ज्ञात करें।
19	Find the range of the function $f(x) = \cos^{-1} x, x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ फलन $f(x) = \cos^{-1} x, x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ का परिसर ज्ञात करें ।
4 Marks Questions	
1.	<p>A company maintains records of employees in a relational database. If the relation R defines a condition where "if an employee X reports to Y, then Y does not report to X," which type of relation does it represent? Justify your answer with a real-life example.</p> <p>एक कंपनी कर्मचारियों का रिकॉर्ड एक संबंध डेटाबेस में रखती है। यदि संबंध R इस शर्त को परिभाषित करता है कि "यदि कर्मचारी X, Y को रिपोर्ट करता है, तो Y, X को रिपोर्ट नहीं करेगा," तो यह कौन सा प्रकार का संबंध दर्शाता है? एक वास्तविक जीवन के उदाहरण के साथ अपने उत्तर को उचित ठहराए।</p>
2	<p>In a school, a relation R is defined on the set of students where $(a, b) \in R$ if student 'a' and student 'b' have the same marks in Mathematics. Prove whether this relation is reflexive, symmetric, or transitive .</p> <p>एक विद्यालय में, विद्यार्थियों के समुच्चय पर एक संबंध R इस प्रकार परिभाषित किया गया है कि $(a, b) \in R$ यदि छात्र 'a' और छात्र 'b' के गणित में समान अंक हैं। प्रमाणित कीजिए कि यह संबंध स्वतुल्य , सममित या संक्रामक है अथवा नहीं।</p>
3	<p>A company assigns a unique email ID to every employee. Is the function mapping employees to their email IDs one-to-one and onto ? Justify your answer with an example.</p> <p>एक कंपनी प्रत्येक कर्मचारी को एक अद्वितीय ईमेल आईडी प्रदान करती है। क्या कर्मचारियों से उनकी ईमेल आईडी का चित्रण एकैक और आच्छादक है? उदाहरण देकर अपने उत्तर को उचित ठहराए।</p>
4	<p>If $f(x) = x^2$ is defined on the set of real numbers, determine whether it is a one-to-one and onto function . Modify the domain and codomain to make it bijective.</p>

	<p>यदि $f(x) = x^2$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित है, तो जाँचें कि क्या यह एकैक और आच्छादक फलन है? इसे एकैकी एवं आच्छादक बनाने के लिए इसके प्रांत और सह-प्रांत को संशोधित करें।</p>
5	<p>महत्तम पूर्णांक फलन $f(x) = [x]$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ के लिए एकैक एवं आच्छादी का परीक्षण कीजिए।</p> <p>Test the injective and surjective for the greatest integer function $f(x) = [x]$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$</p>
6	<p>A delivery service calculates the shipping cost based on weight. Explain why this can be represented as a function and determine whether it is one-to-one and onto . Provide justification.</p> <p>एक डिलीवरी सेवा वजन के आधार पर शिपिंग लागत की गणना करती है। समझाएँ कि इसे एक फलन के रूप में क्यों दर्शाया जा सकता है और जाँचें कि क्या एकैकी और आच्छादक है? उचित तर्क दें।</p>
7	<p>Consider the function $f(x) = \sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x)$. Prove that its value remains constant for all x in the domain. Justify using the concept of principal value branch .</p> <p>फलन $f(x) = \sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x)$ पर विचार करें। यह प्रमाणित करें कि इसके सभी x के लिए मान स्थिर रहता है। इसे मुख्य मान शाखा की अवधारणा का उपयोग करके उचित ठहराएँ।</p>
8	<p>The angle of elevation of a tower increases as an observer moves closer to it. Model this scenario using an inverse trigonometric function and analyze its properties.</p> <p>किसी टॉवर की ऊँचाई का कोण तब बढ़ता है जब कोई पर्यवेक्षक उसके निकट आता है। इस परिदृश्य को एक प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का उपयोग करके मॉडल करें और इसकी विशेषताओं का विश्लेषण करें।</p>
9	<p>If $f(x) = \tan^{-1}(x) + \cot^{-1}(x)$, evaluate $f(x)$ for all values in its domain. Provide a real-world example where such a relation might be useful.</p>

	यदि $f(x) = \tan^{-1}(x) + \cot^{-1}(x)$ है, तो इसके सभी संभव मानों के लिए $f(x)$ का मान निकालें। एक वास्तविक दुनिया का उदाहरण दें जहाँ ऐसा संबंध उपयोगी हो सकता है।
10	<p>The speed of a car decreases as it approaches a red traffic light. Represent this situation using an inverse trigonometric function and explain its real-life significance.</p> <p>किसी कार की गति तब कम होती है जब वह लाल ट्रैफिक लाइट के करीब आती है। इस स्थिति को एक प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का उपयोग करके प्रदर्शित करें और इसके वास्तविक जीवन के महत्व को समझाएँ।</p>

5 Marks Questions

Q1. A delivery service uses an **AI-based algorithm** to distribute parcels efficiently. The system must ensure that if a **parcel is sent from location A to B**, and another from **B to C**, then there must be a **direct route from A to C**. Analyze whether this distribution model follows a **transitive relation**. Justify your answer with an example.

डिलीवरी सेवा **AI आधारित एल्गोरिदम** का उपयोग करके पार्सल वितरित करती है। सिस्टम को यह सुनिश्चित करना होगा कि यदि कोई पार्सल स्थान **A से B भेजा जाता है**, और दूसरा **B से C**, तो **A से C** के बीच सीधा मार्ग होना चाहिए। विश्लेषण करें कि क्या यह वितरण मॉडल **संक्रामक (Transitive) संबंध** का पालन करता है। उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि करें।

Q2. A mobile payment app records transactions between users. If the app ensures that for every user **A → B** transaction, there is also a **B → A** transaction, which type of relation does this represent? Explain with an example whether the relation is **symmetric, reflexive, or transitive**.

एक मोबाइल भुगतान ऐप उपयोगकर्ताओं के बीच लेनदेन दर्ज करता है। यदि ऐप यह सुनिश्चित करता है कि प्रत्येक उपयोगकर्ता के लिए **A → B** लेनदेन हो, तो एक **B → A**

लेनदेन भी हो, तो यह किस प्रकार का संबंध दर्शाता है? उदाहरण देकर समझाएँ कि क्या यह संबंध **सममित (Symmetric)**, **स्वतुल्य (Reflexive)**, या **संक्रामक (Transitive)** है।

Q3. A **university admission system** considers a function **f: Students → Courses** where each student is assigned exactly **one course**, but multiple students can be assigned the same course. Analyze whether this function is **one-to-one (injective)**, **onto (surjective)**, or **both**. Justify your answer.

एक विश्वविद्यालय प्रवेश प्रणाली एक फलन $f: \text{छात्र} \rightarrow \text{पाठ्यक्रम}$ को लागू करती है, जहाँ प्रत्येक छात्र को **सिर्फ एक पाठ्यक्रम** सौंपा जाता है, लेकिन एक ही पाठ्यक्रम कई छात्रों को मिल सकता है। विश्लेषण करें कि क्या यह फलन **एकैकी (Injective)**, **आच्छादक (Surjective)**, या **दोनों** है। अपने उत्तर को उचित ठहराएँ।

Q4. A **biometric security system** grants access to employees based on **fingerprint recognition**. Each employee has a **unique fingerprint**, but one fingerprint cannot belong to multiple employees. Determine if the fingerprint recognition system follows a **one-to-one and onto function**. Explain your reasoning.

एक बायोमेट्रिक सुरक्षा प्रणाली कर्मचारियों को **फिंगरप्रिंट पहचान** के आधार पर पहुंच प्रदान करती है। प्रत्येक कर्मचारी के पास **एक अद्वितीय फिंगरप्रिंट** होता है, लेकिन एक फिंगरप्रिंट कई कर्मचारियों से संबंधित नहीं हो सकता। विश्लेषण करें कि क्या यह फिंगरप्रिंट पहचान प्रणाली **एकैकी और आच्छादक फलन** का पालन करती है। अपने उत्तर की व्याख्या करें।

Q5. A traffic management system tracks the speed of vehicles on different roads and plots a **speed-time graph**. If the function representing speed has an **inverse**, what condition must be satisfied? Explain using the concept of **inverse functions and their graphical interpretation**.

एक यातायात प्रबंधन प्रणाली विभिन्न सड़कों पर वाहनों की गति को ट्रैक करती है और एक **गति-समय ग्राफ** बनाती है। यदि गति को दर्शाने वाला फलन **व्युत्क्रम (Inverse) फलन**

रखता है, तो कौन सी शर्त पूरी होनी चाहिए?
व्युत्क्रम फलनों और उनके ग्राफिकल व्याख्या के आधार पर समझाएँ।

Q6. A drone surveillance system tracks objects using an angle of elevation. The function used to determine the height of an object is based on **inverse trigonometric functions**.

If the height function is given by:

$$h = \tan^{-1}(\theta) + \sin^{-1}(\theta)$$

Analyze the **domain and range** of this function.

एक ड्रोन निगरानी प्रणाली कोणीय उन्नयन का उपयोग करके वस्तुओं को ट्रैक करती है। वस्तु की ऊँचाई निर्धारित करने के लिए उपयोग किया जाने वाला फलन व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय फलनों पर आधारित है। यदि ऊँचाई फलन निम्नलिखित हो:

$$h = \tan^{-1}(\theta) + \sin^{-1}(\theta)$$

तो इस फलन के **प्रान्त (Domain)** और **सह प्रान्त (Range)** का विश्लेषण करें।

Q7. A pendulum swings back and forth, and its motion is described using **trigonometric and inverse trigonometric functions**. If the angle θ follows the equation:

$$\theta = \cos^{-1}(t)$$

Determine the **principal value branch** and interpret its physical significance.

एक लोलक (Pendulum) आगे-पीछे झूलता है, और इसकी गति त्रिकोणमितीय और व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय फलनों का उपयोग करके वर्णित की जाती है। यदि कोण θ समीकरण का पालन करता है:

$$\theta = \cos^{-1}(t)$$

तो मुख्य मान शाखा (Principal Value Branch) निर्धारित करें और इसके भौतिक महत्व की व्याख्या करें।

Q8- A **satellite mapping system** calculates the latitude of a location using **inverse trigonometric functions**. If the latitude function is given as:

$$L = \sin^{-1}(h/R)$$

where **h** is the altitude and **R** is Earth's radius, determine the **valid domain** of this function and explain its interpretation.

प्रश्न 8 — एक उपग्रह मानचित्रण प्रणाली किसी स्थान के अक्षांश (latitude) की प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों (inverse trigonometric functions) का उपयोग करके गणना करती है। यदि अक्षांश फलन इस प्रकार दिया गया है:

$$L = \sin^{-1}(h/R)$$

जहाँ **h** ऊँचाई (altitude) है और **R** पृथ्वी की त्रिज्या (Earth's radius) है, तो इस फलन के लिए **प्रमाणिक प्रांत (valid domain)** निर्धारित कीजिए और इसका **अर्थ स्पष्ट कीजिए**।

Q9-A **robotic arm** moves based on an input function **f(x)**. If the movement function is one-to-one, why is it essential for ensuring precise operations? Analyze with an example.

एक रोबोटिक भुजा एक इनपुट फलन **f(x)** के आधार पर गतिशील होती है। यदि यह गति फलन एकैक है, तो सटीक संचालन सुनिश्चित करने के लिए यह क्यों आवश्यक है? एक उदाहरण के साथ विश्लेषण कीजिए।

Q10. Let function $f(x): \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [3, 11]$ defined as $f(x) = \sin^2 x + 4 \sin x + 6$, Show that **f** is bijective function.

यदि फलन $f(x): \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [3, 11]$, निम्न प्रकार से परिभाषित है $f(x) = \sin^2 x + 4 \sin x + 6$, दिखाइए कि f आच्छादी फलन है।

Q11. Prove that a relation R on a set A is an **equivalence relation** if and only if it is reflexive, symmetric, and transitive.
सिद्ध करें कि यदि कोई संबंध R किसी समुच्चय A पर स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है, तो वह एक तुल्यता संबंध (equivalence relation) होगा।

Q12. Show that the relation R on the set of integers Z , defined by $a R b$ if and only if $a - b$ is divisible by 5, is an **equivalence relation**.
सिद्ध करें कि पूर्णाकों के समुच्चय Z पर परिभाषित संबंध R , जिसमें $a R b \Leftrightarrow a - b$ संख्या 5 से विभाज्य हो, एक तुल्यता संबंध (equivalence relation) है।

Q13. Define a function $f: R \rightarrow R$ such that it is **one-one (injective)** but not onto (surjective). Justify your answer with proof.
ऐसा फलन $f: R \rightarrow R$ परिभाषित करें जो एकैक (injective) हो लेकिन आच्छादक (surjective) न हो। अपने उत्तर को प्रमाण सहित स्पष्ट करें।

Q14. If $f: R \rightarrow R$ and $g: R \rightarrow R$ are **one-one** functions, prove that their composition $(g \circ f)$ is also **one-one**.
यदि $f: R \rightarrow R$ और $g: R \rightarrow R$ एकैक फलन हैं, तो सिद्ध करें कि उनका संयोजन $(g \circ f)$ भी एकैक फलन होगा।

Q15. Prove that the function $f(x) = e^x$ is neither **one-one nor onto** when defined on the set of real numbers.
सिद्ध करें कि यदि $f(x) = e^x$ को वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित किया जाए, तो यह न तो एकैकी होगा और न ही आच्छादक।

Q16. Graphically represent the function $f(x) = \sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x)$ and discuss its domain and range.
फलन $f(x) = \sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x)$ को ग्राफ़ द्वारा दर्शाएं तथा इसके (domain) और परिसर (range) पर चर्चा करें।

केस स्टडी आधारित प्रश्न -

Case Study 1:

A school assigns **student ID numbers** to every student in a way that each student has a **unique** ID. The administration wants to verify whether the assigned function is **one-to-one and onto**. Suppose the student ID function maps **each student to a unique numerical ID** without repetition.

विद्यालय प्रत्येक छात्र को **अद्वितीय छात्र आईडी** आवंटित करता है। प्रशासन यह सत्यापित करना चाहता है कि दी गई संख्यात्मक आईडी आवंटन प्रक्रिया **एकैक (one-to-one)** और **आच्छादक (onto)** फलन है या नहीं। मान लीजिए कि यह छात्र आईडी फलन प्रत्येक छात्र को एक **अद्वितीय संख्यात्मक आईडी** प्रदान करता है।

Questions

1. Is this function one-to-one? Justify your answer.
क्या यह फलन **एकैक (one-to-one)** है? अपना उत्तर उचित ठहराइए। (1 mark)
2. If the number of students equals the number of assigned IDs, is this function onto? Explain.
यदि छात्रों की संख्या आईडी की संख्या के बराबर है, तो क्या यह फलन **आच्छादक (onto)** होगा? समझाइए। (1 mark)
3. Give one real-life example of a function that is not one-to-one.
एक ऐसा वास्तविक जीवन का उदाहरण दीजिए, जो **एकैकी (one-to-one)** नहीं है। (2 marks)

Case Study 2:

In a **social networking website**, people can form friendships. Suppose the **relation 'is a friend of'** is defined on a set of people. The website wants to verify whether this relation is **reflexive, symmetric, and transitive**.

एक **सोशल नेटवर्किंग वेबसाइट** पर लोग मित्रता कर सकते हैं। मान लीजिए कि व्यक्तियों के समूह पर संबंध '**मित्र है**' परिभाषित किया गया है। वेबसाइट यह सत्यापित करना चाहती है कि यह संबंध **स्वतुल्य (reflexive)**, **सममित (symmetric)**, और **संक्रामक (transitive)** है या नहीं।

Questions

1. Is the relation 'is a friend of' reflexive? Justify.
क्या 'मित्र है' संबंध स्वतुल्य (reflexive) है? अपना उत्तर उचित ठहराइए। (1 mark)
 2. Explain whether this relation is symmetric.
क्या यह संबंध सममित (symmetric) है? स्पष्ट करें। (1 mark)
 3. Can this relation be considered an equivalence relation? Why or why not?
क्या यह संबंध तुल्यता संबंध (equivalence relation) माना जा सकता है? क्यों या क्यों नहीं? (2 marks)
-

Case Study 3:

A weather scientist uses a **satellite** to measure the **angle of elevation** of a weather balloon. The angle θ is recorded, and the scientist needs to calculate the height of the balloon using **inverse trigonometric functions**.

एक मौसम वैज्ञानिक उपग्रह की सहायता से एक मौसम गुब्बारे के उन्नयन कोण को मापता है। कोण θ रिकॉर्ड किया जाता है और वैज्ञानिक को प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का उपयोग करके गुब्बारे की ऊँचाई गणना करनी होती है।

Questions

1. What is the range of the inverse sine function $\sin^{-1}(x)$?
प्रतिलोम साइन फलन $\sin^{-1}(x)$ की परिसर (range) क्या होती है? (1 mark)
2. Find the value of $\tan^{-1}(1) + \sin^{-1}(1/2)$.
 $\tan^{-1}(1) + \sin^{-1}(1/2)$ का मान ज्ञात करें। (1 mark)
3. If a satellite measures an angle of $\theta = 45^\circ$, express the height of the balloon in terms of inverse trigonometric functions.
यदि उपग्रह द्वारा मापा गया कोण $\theta = 45^\circ$ हो, तो मौसम गुब्बारे की ऊँचाई को प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के रूप में व्यक्त करें। (2 marks)