Translation of Harbans Puzzles :
Sunil Bajaj_Jasneet Kaur_From Azim premji University At Right Angles_November,2022

कक्षा में

हरबन्स पहेलियाँ

सुनील बजाज और जसनीत कौर

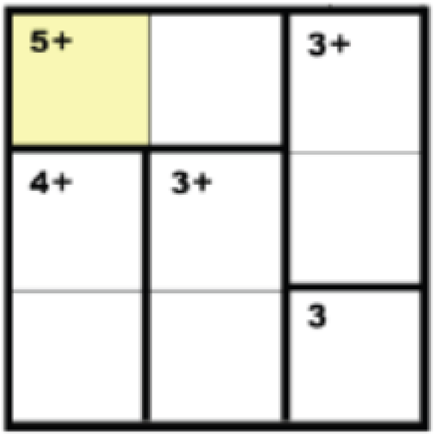
गणितीय खेल, पहेलियाँ और संख्याओं वाली कहानियाँ बच्चों को अपने रोज़मर्रा के जीवन के तार्किक कामकाज और गणितीय सोच के बीच सम्बन्ध बनाने और उनकी रोज़मर्रा की समझ का निर्माण करने में सक्षम बनाने के लिए उपयोगी होती हैं। (एनसीईआरटी, 2006)

कोलिन्स शब्दकोश के अनुसार पहेली का मतलब है- "मनोरजंन के लिए निर्मित ऐसा कोई भी खिलौना, समस्या या अन्य युक्ति जो कौशल या धैर्यपूर्वक प्रयास द्वारा हल की जाने वाली कठिनाइयों को प्रस्तुत करती हो।" अधिकांश पहेलियाँ एक पेचीदा समस्या प्रस्तुत करती हैं जिन्हें आसानी से हल नहीं किया जा सकता है। साथ ही इन्हें इस तरह डिज़ाइन किया जाता है कि यह मज़ेदार और आकर्षक हों, ताकि पहेली हल करने वाला समाधान का पता लगाने में समय और ऊर्जा का निवेश करे। गणितीय पहेलियाँ बच्चों को कक्षा में समृद्ध गणितीय अन्वेषण और तार्किक तर्कों (logical reasoning) में संलग्न कर सकती हैं (एवरेड, 2001)। इस लेख में हम एक जापानी पहेली 'केनकेन' (जिसे हमने हरबन्स पहेली नाम दिया है) के विस्तार और विविधताओं का वर्णन करेंगे और फिर इन पहेलियों के बारे में बच्चों की प्रतिक्रियाओं पर चर्चा करेंगे।

केनकेन पहेलियों का आविष्कार एक जापानी शिक्षक ***तेत्सुया मियामोटो*** द्वारा किया गया था। इन पहेलियों का उपयोग उन्होंने अपने विद्यार्थियों के सीखने के उपकरण के रूप में किया था। केनकेन का अर्थ है चतुराई और इसी तर्ज़ पर हरबन्स पहेली 'हर बन्दा समझदार' (स्थानीय हरियाणवी भाषा में प्रयुक्त होने वाला वाक्यांश) का संक्षिप्त नाम है, जिसका अर्थ है कि हर कोई कुछ भी करने की क्षमता रखता है।

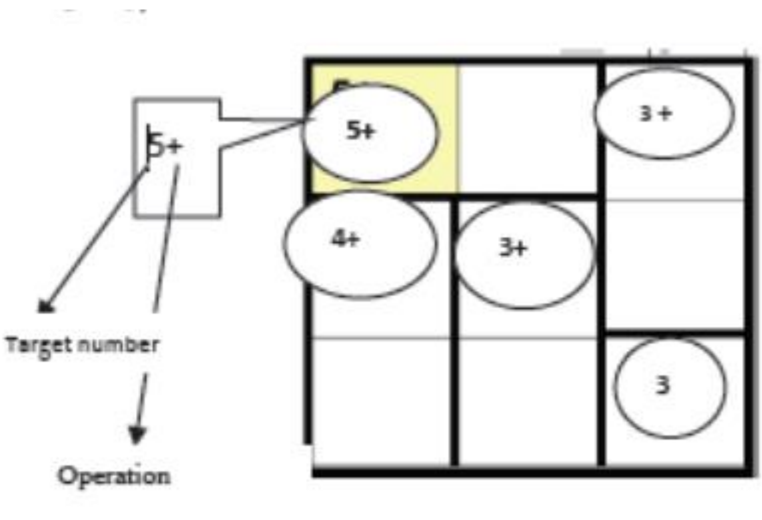
केनकेन पहेली से शुरुआत करना

इन पहेलियों के साथ खेलने के लिए 3×3 या 4×4 या 5×5..... आकार की एक ग्रिड लें।



इस पहेली का लक्ष्य होगा पूरी ग्रिड को संख्याओं से भरना और यह सुनिश्चित करना कि किसी भी पंक्ति या स्तम्भ में कोई भी संख्या दोहराई न जाए। 3×3 की इस ग्रिड में हम केवल तीन संख्याओं 1, 2 व 3 का उपयोग करेंगे। 4×4 की ग्रिड वाली पहेली में हम 1, 2, 3 व 4 संख्याओं का उपयोग करेंगे; 5×5 की ग्रिड में संख्या 1, 2, 3, 4 व 5 का और इसी तरह यह आगे भी जारी रहेगा। मोटी रेखा से बने क्षेत्र को पिंजरा (समूह बॉक्स) कहा जाता है। प्रत्येक समूह बॉक्स के शीर्ष बाएँ कोने में एक ‘लक्ष्य संख्या’ और एक गणितीय संक्रिया होती है। आपके द्वारा पिंजरे के वर्गों में दर्ज की गई संख्याएँ (किसी भी क्रम में) ऐसी होनी चाहिए कि सूचित संक्रिया (+, -, × या ÷) के साथ उनका उपयोग करके लक्ष्य संख्या को प्राप्त किया जा सके। एक वर्ग वाले पिंजरे को ‘फ्रीबी’ (single box) नाम दिया गया है। फ्रीबी में उसी संख्या को भरें जो बॉक्स में दी गई है। याद रखें! संख्याओं को एक ही पंक्ति या स्तम्भ के भीतर दोहराया नहीं जा सकता है, जैसे कि ‘सुडोकू’ में होता है।

शुरुआत में, हम ऊपर दिखाई गई 3x3 की ग्रिड लेते हैं। पहले पिंजरे में, उपयोग की जाने वाली गणितीय संक्रिया **जोड़** है और संख्याओं का योगफल 5 होना चाहिए। चूँकि इस समूह बॉक्स में 2 वर्ग हैं, इसलिए यहाँ दो सम्भावनाएँ हैं 2 और 3, जिन्हें किसी भी क्रम में रखा जा सकता (3 + 2 या 2 + 3 = 5)।

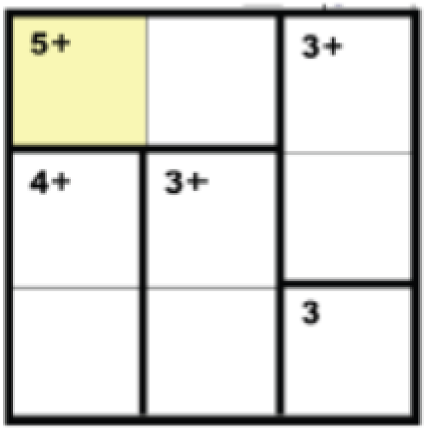


Target Number - लक्ष्य संख्या, Operation - संक्रिया

तो, शुरू करते हैं

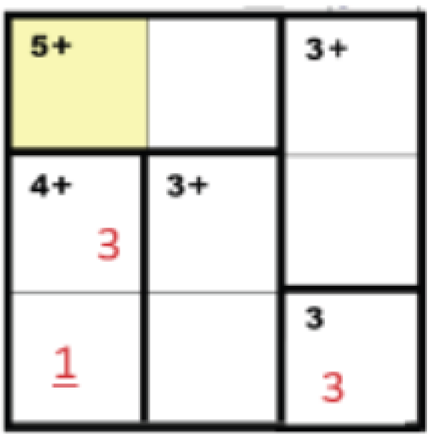
1. फ्रीबी (single box) में 3 दर्ज करें। एकल वर्ग से शुरू करना हमेशा सबसे अच्छा होता है।

चरण 1



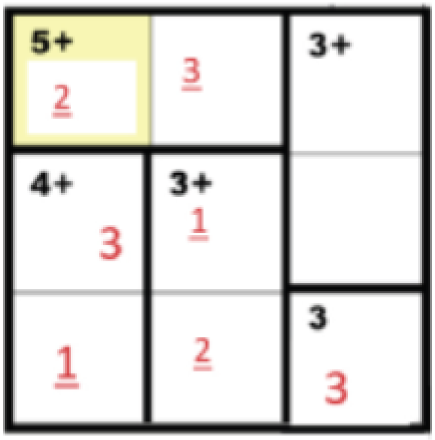
2. 4 प्राप्त करने के लिए निचले-बाएँ समूह बॉक्स के नीचे वाले वर्ग में 1 और ऊपर वाले वर्ग में 3 भरा जाना चाहिए क्योंकि 3 पहले से ही अन्तिम पंक्ति में भरा हुआ है, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

चरण 2



3. प्रत्येक पंक्ति और स्तम्भ में 1, 2 और 3 होना चाहिए। निचली पंक्ति में 1 और 3 पहले से ही हैं, इसलिए निचली पंक्ति के बीच वाले वर्ग और शीर्ष बाएँ वर्ग में भरे जाना वाला एकमात्र विकल्प 2 है। फिर शीर्ष पंक्ति के बीच वाले वर्ग में 3 होना चाहिए और इसके साथ ही शीर्ष पिंजरा पूरा भर जाता है।

चरण 3



4. अब हम इसी तर्क का उपयोग करके दाईं ओर के स्तम्भ के पहले और दूसरे वर्गों में 1 और 2 भर सकते हैं।

चरण 4

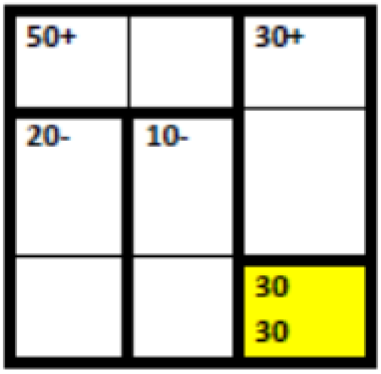
आइए अब हम हरबन्स पहेली पर चलते हैं

केनकेन पहेली का विस्तार करने के लिए हम संख्याओं (क्रमागत या अक्रमागत) के एक यादृच्छिक समुच्चय और उन पर संक्रियाओं का उपयोग कर सकते हैं। 3×3 की पहेली में आप 0, 1, 2 या 1, 2, 3 या 10, 20, 30 या तीन पूर्णांकों/अभाज्य संख्याओं/सम संख्याओं/विषम संख्याओं का उपयोग कर सकते हैं, यह संख्याएँ समान दूरी पर (these need not be equally spaced) हों यह ज़रूरी नहीं है। इसी तरह 4×4 की पहेली के लिए हम किन्हीं भी चार यादृच्छिक संख्याओं का समुच्चय ले सकते हैं, और इसी तरह यह आगे भी जारी रहेगा। हम कुछ उदाहरणों का उपयोग करके इसे स्पष्ट करेंगे।

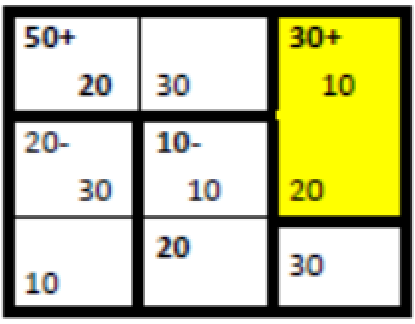
उदाहरण 1

3×3 की इस पहेली में हम संख्या 10, 20, 30 और जोड़ और घटाव की संक्रियाओं का उपयोग करेंगे।

एकल वर्ग में संख्या 30 भरें। एकल वर्ग से शुरू करना हमेशा सबसे अच्छा होता है।

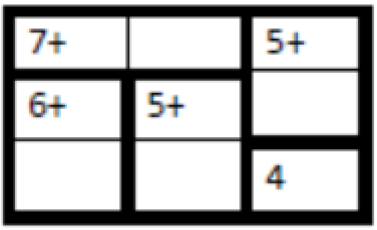


फिर केनकेन पहेली के जैसे नियमों का उपयोग करते हुए हम लक्ष्य संख्याएँ प्राप्त करने के लिए दी गई संक्रिया के साथ 10, 20 और 30 का उपयोग करके ग्रिड को भर सकते हैं।



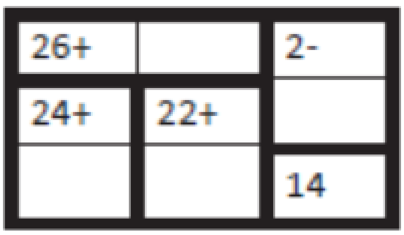
उदाहरण 2

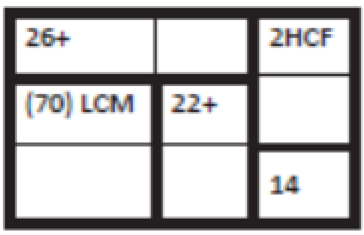
1 से 5 तक की किन्हीं तीन क्रमागत संख्याओं (consecutive numbers) का उपयोग करें (सोचें और संख्याएँ चुनें)।



उदाहरण 3

1 से 15 तक की तीन क्रमागत सम संख्याओं का उपयोग करें।





उदाहरण 4

1 से 10 तक की किन्हीं 3 अभाज्य संख्याओं का उपयोग करें।

8+		5+
7+	5+	
		5

उदाहरण 5

-5 और 5 के बीच के 3 क्रमागत पूर्णांकों का उपयोग करें।

1+		(-1) +
(0)+	(-1) +	
		1

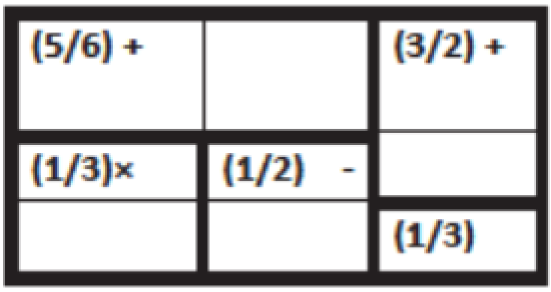
उदाहरण 6

3 भिन्नों का उपयोग करें : 1/1, 1/2, 1/3

(5/6) +		(3/2) +
(4/3)+	(3/2) +	
		(1/3)

उदाहरण 7

3 भिन्नों का उपयोग करें : 1/1, 1/2, 1/3



उदाहरण 8

i. उपयोग की जाने वाली संख्याओं को चुनें और उन्हें x, y और z के रूप में मानें; यहाँ संक्रियाओं को पीले रंग से हाइलाइट किया गया है और परिणाम को इनसे पहले लिखा गया है।

ii. -5 से 5 तक के 3 क्रमागत पूर्णांकों का उपयोग करें।

-2(2x-y)		1
2(z-x)	+1(y+z)	-1 (x+y)

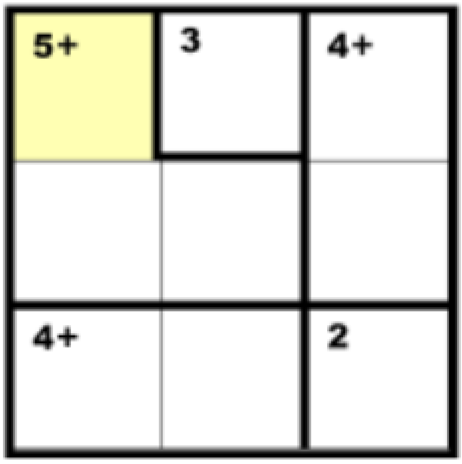
उदाहरण 9

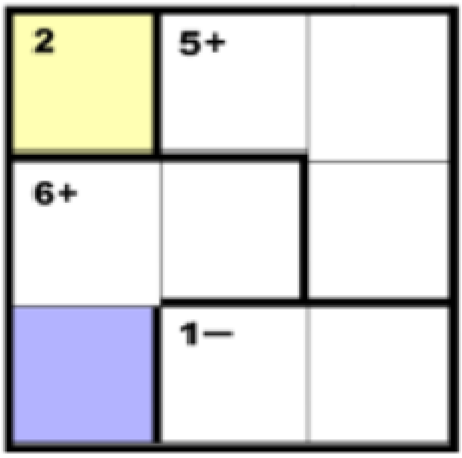
उन संख्याओं का चयन करें जिनका उपयोग इस पहेली को हल करने के लिए किया जा सकता है।

उदाहरण 10

1/x, x, x^2 का उपयोग करें।

यहाँ हम देख सकते हैं कि कैसे हरबन्स पहेलियाँ केनकेन पहेलियों से अलग हैं। हरबन्स पहेलियों में विभिन्न संक्रियाओं के साथ विभिन्न प्रकार के संख्या समुच्चयों का उपयोग किया जा सकता है, जैसे कि 10 के गुणज, सम संख्याएँ, विषम संख्याएँ, दशमलव, भिन्न, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक, चर इत्यादि। इसके अलावा आसान भाषा में व्यक्त करने के लिए 'पिंजरा' नाम को 'समूह बॉक्स' और 'फ्रीबी' को 'एकल बॉक्स' द्वारा प्रतिस्थापित किया गया है। कोई भी संख्या किसी भी पंक्ति या स्तम्भ में दोहराई नहीं जाएगी, यह नियम *हरबन्स पहेलियों* और *केनकेन पहेलियों* दोनों में समान है और प्रतीकात्मक निरूपण भी समान है, यानी लक्ष्य संख्या को संक्रिया के साथ बॉक्स के शीर्ष पर लिखा जाता है। इसके अलावा, ख़ानों (cells) की अलग-अलग संख्याओं के लिए हम विभिन्न प्रकार के पिंजरों का उपयोग कर सकते हैं। नीचे कुछ पहेलियों के उदाहरण दिखाए गए हैं जिनमें दो से अधिक ख़ानों वाले पिंजरे हैं।

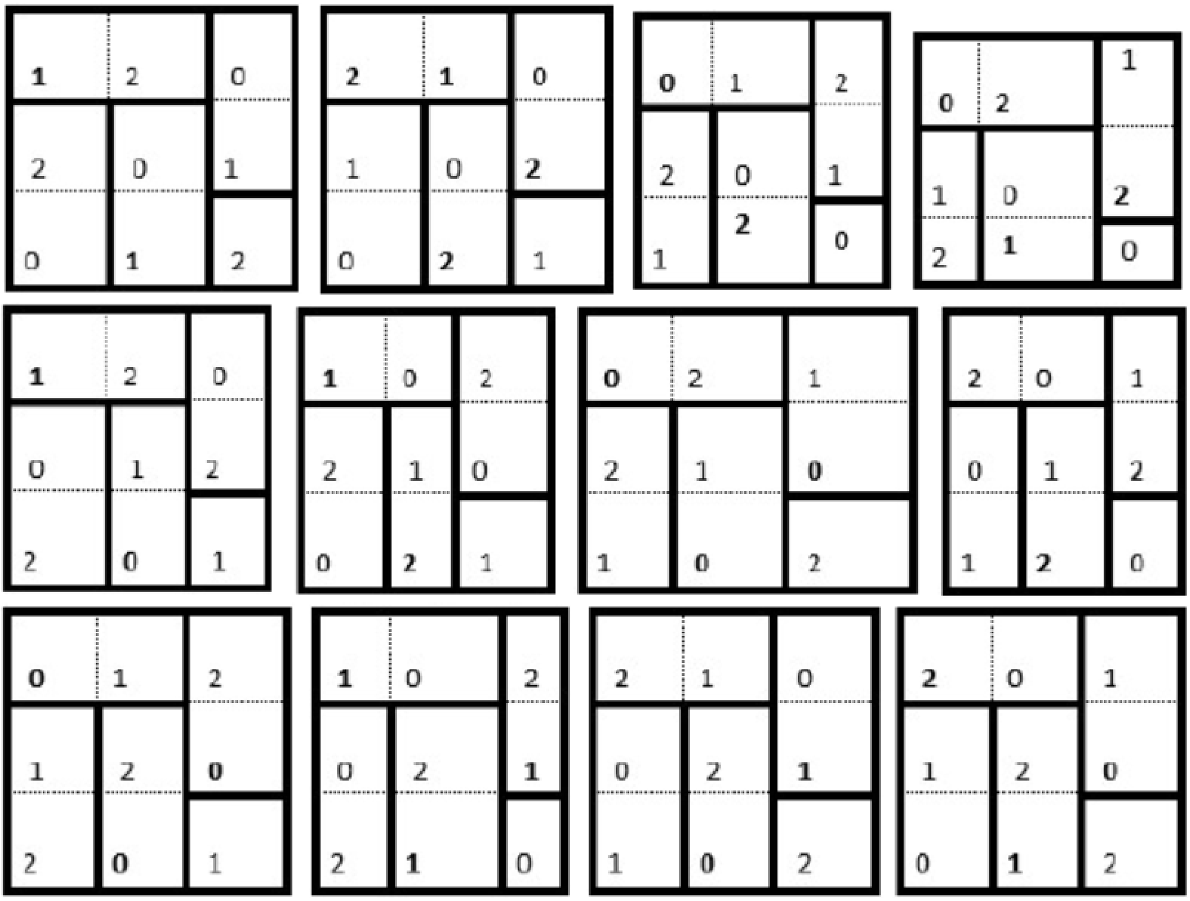




सभी उम्र के विद्यार्थियों के साथ इसका उपयोग करने के लिए इस पहेली के छिपे हुए पैटर्नों और सम्भावनाओं की पड़ताल करना

जब हम पहेलियों की पड़ताल कर रहे थे, तब इन पहेलियों को बनाने और हल करने के दौरान कई पैटर्न हमारे सामने आए। हमने महसूस किया कि इस तरह की पहेलियाँ लो फ्लोर हाई सीलिंग टॉस्क (यानी कि इनमें कठिनाई का स्तर बढ़ता चला जाता है) के रूप में काम करती

हैं और बच्चों के कम्प्यूटेशनल चिन्तन कौशल को भी बढ़ावा देती हैं। अपने कथन का समर्थन करने के लिए हम 3×3 की ग्रिड में देखे गए पैटर्न और 3×3 की ग्रिड वाली पहेली बनाने की सम्भावनाओं को स्पष्ट करेंगे। आइए हम 3×3 ग्रिड में 3 संख्याओं 0, 1 व 2 को भरने का एक उदाहरण लें। हम इस बात का अवलोकन कर सकते हैं और क्रमचय (permutation) का उपयोग करके गणना भी कर सकते हैं कि सम्भावित संख्या को भरे जाने के कुल 12 तरीक़े हैं।



हम देख सकते हैं कि पहले वर्ग को 3 सम्भावित तरीक़ों से भरा जा सकता है, दूसरे और चौथे वर्गों को 2 सम्भावित तरीक़ों से भरा जा सकता है, बाक़ी वर्गों के लिए केवल एक ही विकल्प बचता है। इसलिए, सम्भावनाओं की कुल संख्या 3 × 2 × 2 = 12 है।

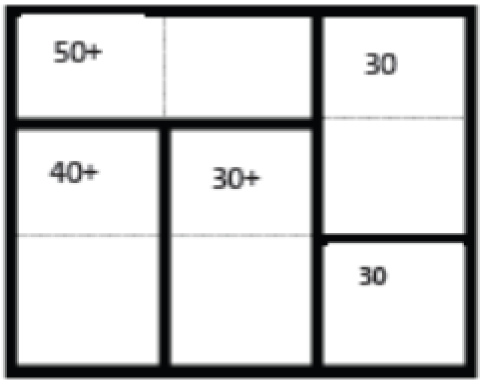
I	II	III
IV	V	VI
VII	VIII	IX

पिंजरों और संक्रियाओं को बदल करके सिर्फ़ एक ही ग्रिड से प्रचुर मात्रा में पहेलियाँ बनाई जा सकती हैं। जब यह पहेलियाँ अलग-अलग कक्षाओं के बच्चों को दी गईं, तो हमने पाया कि विद्यार्थी ऐसी पहेलियाँ बनाने और हल करने के लिए अलग-अलग तरीक़े उपयोग करते थे। तीसरी और चौथी कक्षा के कई विद्यार्थियों ने पहेली बनाने के लिए लक्ष्य संख्या लिखने के लिए ‘अनुमान और त्रुटि’ की रणनीति का उपयोग किया और इसे हल करते समय अपनी त्रुटियों को ठीक किया। पहेली बनाने का एक और तरीक़ा जिसका उपयोग तीसरी कक्षा के दो विद्यार्थियों ने किया, वह था ‘समाधान से पहेली बनाने की रणनीति’, 'यानी उन्होंने लक्ष्य संख्याओं और उपयोग की गई संक्रियाओं तक पहुँचने के लिए एक समाधान से शुरुआत की (लेकिन इसे अपनी पहेली शीट में नहीं लिखा)। उदाहरण के लिए, उन्होंने 3×3 की ग्रिड की पहली पंक्ति में 1, 2, 3 को रखने का फ़ैसला किया और फिर लक्ष्य संख्या के तौर पर 1 को प्राप्त करने के लिए 3 में से 2 को घटा दिया। इस तरह उन्होंने लक्ष्य संख्या 1 और संक्रिया के रूप में ‘घटाना’ के साथ 2 ख़ानों वाले एक पिंजरे का निर्माण किया। इस तरह के अवसरों ने उन्हें विश्लेषणात्मक और तार्किक रूप से सोचने के लिए प्रेरित किया, जो कि महत्त्वपूर्ण गणितीय प्रक्रियाएँ हैं।

इसके अलावा, पहेली बनाते समय यह देखा गया कि सिर्फ़ एक पहेली लेकर हम प्रचुर मात्रा में इसके कई भिन्न रूप बना सकते हैं।

मान लीजिए कि हमारे पास एक पहेली है जिसमें 0, 1, 2 संख्याओं को भरना है और हम 0, 1, 2 के बजाय 10, 20, 30 का उपयोग करके एक और पहेली बनाना चाहते हैं। पहली लक्ष्य संख्या को ध्यान-से देखें, यह 1 और 2 यानी कि दूसरी और तीसरी संख्या का योगफल है। इसलिए, हम 3^+ को 50^+ से बदल देंगे क्योंकि 50 दूसरी और तीसरी संख्या का योगफल है। इसी तरह, 1 को 1 + 0, यानी कि पहली और दूसरी संख्याओं को जोड़कर प्राप्त किया जा सकता है। इसलिए 1 को 30, यानी कि 10 और 20 के योगफल द्वारा प्रतिस्थापित किया जाएगा, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

तो, हमारी नई पहेली होगी-



इस तरह हम ग्रिड में भरने के लिए किन्हीं भी तीन संख्याओं (पूर्णांक, भिन्न, आदि) को ले सकते हैं और फिर उपरोक्त प्रक्रिया का उपयोग करके लक्ष्य संख्याओं को बदल सकते हैं। आप देख सकते हैं कि ऊपर दिए गए सभी उदाहरण (1 से 10) केवल एक पहेली का उपयोग करके बनाए गए हैं। इनमें पिंजरों को समान रखते हुए लक्ष्य संख्याओं को बदल दिया गया है।

इसके अलावा 3×3 की ग्रिड में हम विकर्ण संख्याओं में पैटर्न देख सकते हैं और एक बार यह पैटर्न समझ आ जाएँ, तो पहेली को कम-से-कम चरणों में हल किया जा सकता है।

बच्चों के लिए खोजबीन

इन पहेलियों को आसानी से स्कूल की पाठ्यचर्या में समायोजित किया जा सकता है क्योंकि प्राथमिक से उच्चतर माध्यमिक कक्षाओं तक दी गई अधिकांश स्कूली गणित अवधारणाओं के लिए इस तरह की पहेलियाँ बनाई जा सकती हैं। यह पहेलियाँ समस्या-समाधान के साथ-साथ कक्षा में समस्या प्रस्तुति की भी गुंजाइश प्रदान करती हैं। बच्चों को अभ्यास सामग्री के रूप में भी ऐसी पहेलियाँ दी जा सकती हैं, जो आवश्यक होते हुए भी अक्सर उबाऊ और दोहराव वाली होती हैं। इसके अलावा, इन पहेलियों के ज़रिए नई पहेलियों को बनाने और हल करने, पैटर्नों का पता लगाने और अधिक जटिल गणितीय सम्बन्ध खोजने की बहुत गुंजाइश है। खोजबीन के लिए कुछ प्रश्न इस प्रकार होंगे-

- पहेली को हल करने में कितने चरणों का उपयोग किया गया है?
- पहेली को हल करने के लिए चरणों की न्यूनतम संख्या क्या है?
- क्या दी गई लक्ष्य संख्याओं के साथ समाधान प्राप्त करना हमेशा सम्भव है?
- क्या किसी पहेली का केवल एक ही समाधान होता है या एक से अधिक समाधान हो सकते हैं?
- 4×4 की एक ग्रिड में संख्याओं को भरने के तरीक़ों की सम्भावित संख्या क्या है? क्या हम n×n की ग्रिड में संख्याओं को भरने के तरीक़ों की सम्भावित संख्या प्राप्त करने के लिए सामान्यीकरण कर सकते हैं?

References

1. Evered, L. (2001). Riddles, Puzzles, and Paradoxes: Having Fun with Serious Mathematics. Mathematics Teaching in the Middle School, 6 (8), 458-61.
2. NCERT (2006). National Position Paper on Teaching of Mathematics. NCERT: New Delhi. http://www.kenkenpuzzle.com/

सुनील बजाज एससीईआरटी हरियाणा के उप-निदेशक हैं। वह शिक्षकों के व्यावसायिक विकास, गणित की पाठ्यपुस्तकों गणित किट, टीएलएम और मॉड्यूल के विकास के लिए एनसीईआरटी और एससीईआरटी के स्रोत व्यक्ति भी रह चुके हैं। उन्हें शिक्षक दिवस पर हरियाणा के राज्यपाल द्वारा सम्मानित किया गया था। उनसे bajajsunil68@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

जसनीत कौर एससीईआरटी, हरियाणा में गणित की व्याख्याता हैं। वह खोजी प्रवृत्ति की उत्साही गणित-शिक्षक रही हैं। उन्हें विभिन्न स्कूली कक्षाओं और शिक्षक-शिक्षा वातावरण में गणित पढ़ाने का 13 साल का अनुभव है। विद्यार्थियों और शिक्षकों की गणितीय सोच का अध्ययन करने में उनकी गहन रुचि है। वह राज्य और राष्ट्रीय स्तर पर कई गणित शिक्षा परियोजनाओं का हिस्सा रही हैं। उनसे kaurjasniit@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निदेश सोनी **पुनरीक्षण** एवं **कॉपी-एडिटिंग** : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही